MAT-5105-1

CONIQUES

sofad

MAT-5105-1

CONIQUES

sofad

Coordonnateur du projet : Jean-Paul Groleau

Rédactrice : Sylvie Amideneau

Mise à jour : Line Régis
Catherine Paris

Réviseur du contenu : Jean-Paul Groleau

Réviseur pédagogique : Jean-Paul Groleau

Réviseures linguistiques : Francine Cardinal
Johanne St-Martin

Édition électronique : P.P.I. inc.

Page à couverture : Daniel Rémy

Impression : 2006

Dépôt légal — 2006
Bibliothèque et Archives nationales du Québec
Bibliothèque nationale et Archives Canada Novembre 2014
ISBN 978-2-89493-304-6

TABLE DES MATIÈRES

SOUS-MODULES

PRÉSENTATION DE L'ORDINOGRAMME

BIENVENUE AU ROYAUME DES MATHÉMATIQUES!

Ce programme de mathématiques a été élaboré pour la clientèle adulte des Services d'éducation des adultes des commissions scolaires et de la formation à distance. Les activités d'apprentissage qu'il contient ont été conçues pour être réalisées en apprentissage individualisé. Toutefois, si vous éprouvez des difficultés, n'hésitez pas à consulter votre formatrice ou votre formateur ou à téléphoner à la personne-ressource qui vous a été assignée. Le tableau qui suit situe dans le programme le module que vous avez entre les mains. Il vous permet de visualiser le chemin parcouru ou qui vous reste à parcourir selon l'objectif professionnel que vous poursuivez. Suivant les exigences de votre objectif professionnel, plusieurs voies de sortie du royaume des mathématiques sont prévues.

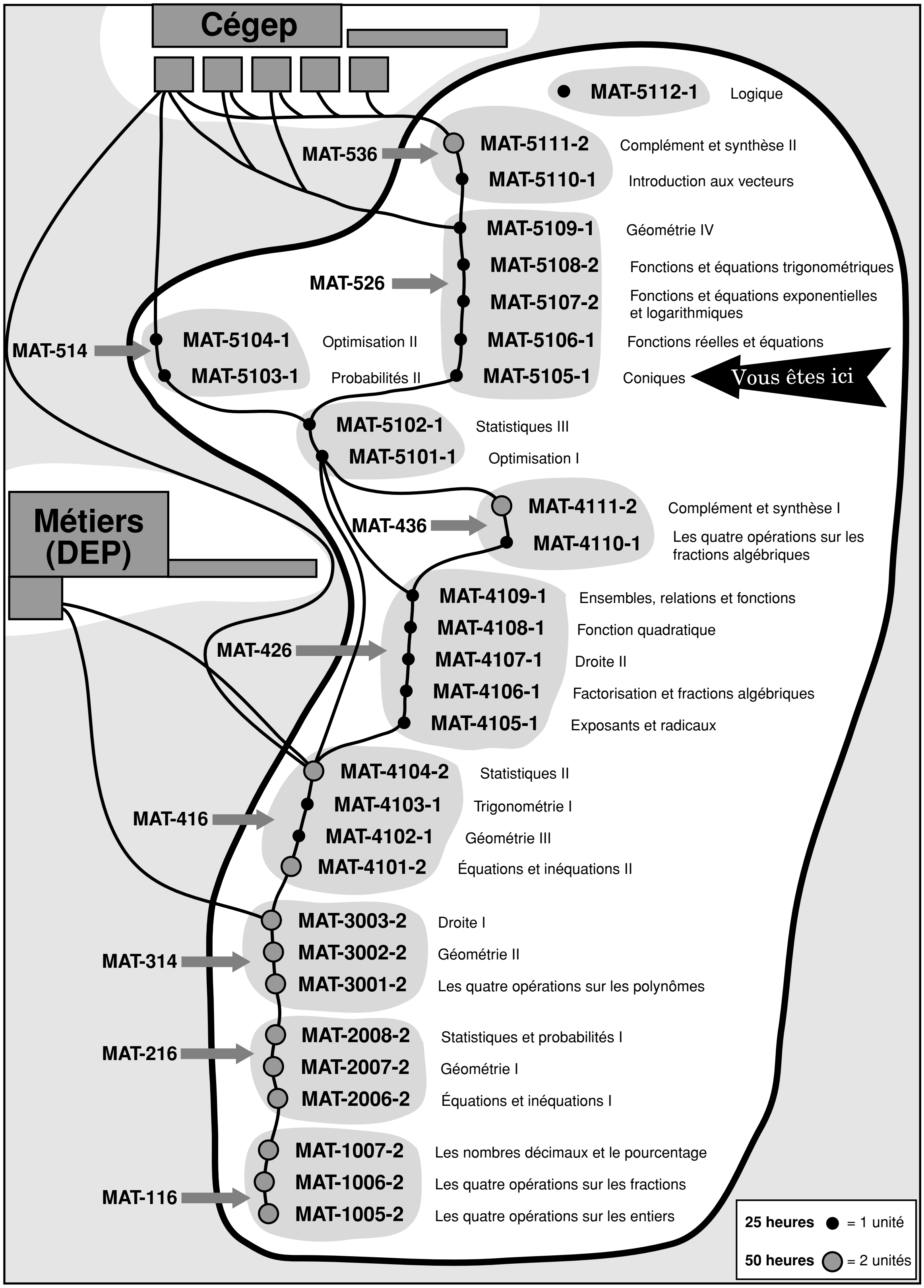
Les premières voies, les routes MAT-3003-2 (MAT-314) et MAT-4104-2 (MAT-416), vous permettent d'entreprendre des études menant à un diplôme d'études professionnelles (DEP) et certains programmes de niveau collégial (cégep) pour la route MAT-4104-2.

Les routes MAT-4109-1 (MAT-426), MAT-4111-2 (MAT-436) et MAT-5104-1 (MAT-514), vous permettent d'obtenir un diplôme d'études secondaires (DES) qui donne accès à certains programmes d'études collégiales (cégep) n'exigeant pas de compétences particulières en mathématiques avancées.

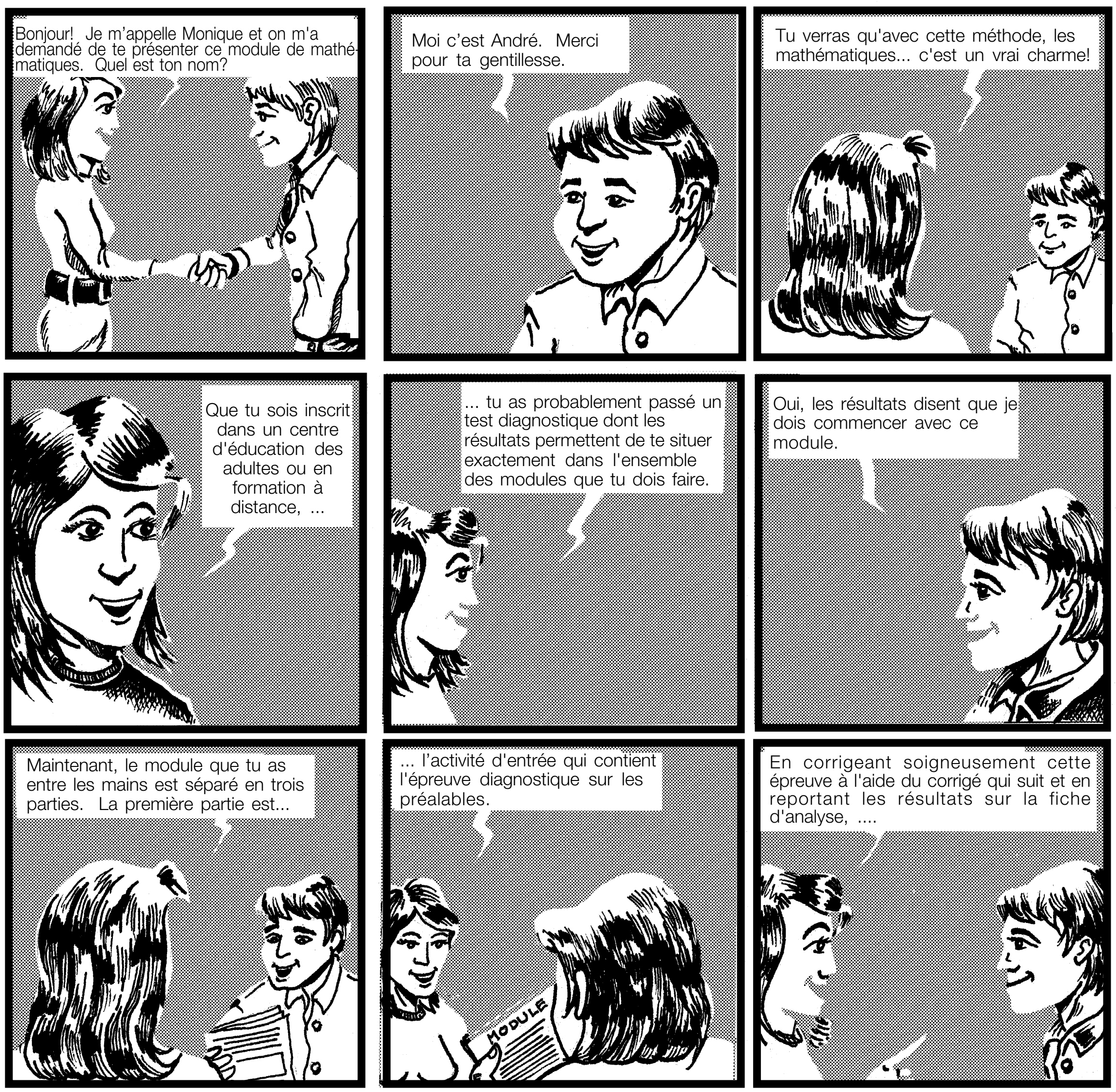
Finalement, les routes MAT-5109-1 (MAT-526) et MAT-5111-2 (MAT-536) vous permettent d'accéder au niveau collégial (cégep) dans des programmes qui exigent de solides connaissances en mathématiques et où d'autres défis vous attendent. Bonne route!

S'il s'agit de votre premier contact avec ce programme de mathématiques, après avoir examiné l'ordinogramme du programme, lisez la section intitulée « Comment utiliser ce guide »; sinon, passez directement à la section intitulée « Introduction générale ». Bon travail!

ORDINOGRAMME DU PROGRAMME



COMMENT UTILISER CE GUIDE?



La ligne de départ montre le **début** de l'apprentissage.

Le petit point d'interrogation blanc identifie les **questions** dont les réponses sont à l'intérieur du texte.

La cible signale l'**objectif** à atteindre.

Le bloc-notes indique un **rappel** des notions que tu as étudiées auparavant.

Le point d'interrogation en gras identifie les **exercices** de consolidation qui te permettront de mettre en pratique ce que tu viens d'apprendre.

La **calculatrice** te rappelle à quel moment t'en servir.

La gerbe de blé identifie une **synthèse** qui te permet de faire le point sur ce que tu viens d'apprendre. Ce logo répété plusieurs fois signifie que tu approches de la fin du module. C'est la synthèse finale qui te permet de faire le lien entre tous les apprentissages du module.

Finalement, la ligne d'arrivée indique qu'il est temps de passer à l'**autoévaluation** pour vérifier si tu as bien assimilé les apprentissages réalisés.


Il y a aussi beaucoup de choses amusantes dans ce module. Par exemple, lorsque tu vois la figure d'un sage, c'est un « Saviez-vous que...? ».
« Saviez-vous que...? »
Oui, par exemple, de petites notes sur l'histoire des mathématiques, des jeux amusants. C'est intéressant et cela te calme en même temps.
Dois-je mémoriser ce que dit le sage?
Non, cela ne fait pas partie de l'apprentissage; c'est un peu comme un moment de détente.
C'est la même chose pour « La page des mathophiles » qui signifie : qui aiment les mathématiques.
C'est tellement stimulant que, même si tu n'es pas obligé de la travailler, tu as envie de la faire.
Et puis, tout au long du module, les auteurs se sont arrangés pour te faciliter la tâche...
... ainsi, les mots en italiques gras apparaissent dans le glossaire à la fin du module...
PARFAIT!
... les passages encadrés t'indiquent qu'il s'agit de points à retenir comme des définitions, des formules, des règles, etc. Je te le dis, c'est plus facile.
Enfin, la troisième partie contient la synthèse finale qui vient faire le lien entre les différentes parties du module.
De plus, tu y trouveras une épreuve d'autoévaluation ainsi que son corrigé. Tu sauras à ce moment-là si tu es prêt pour l'examen final.
Merci, Monique, tu m'as rendu un grand service.
Tout le plaisir est pour moi.
Maintenant, je me sauve. Au revoir!
Plus tard...
C'est fantastique! Je n'aurais jamais cru aimer les mathématiques autant que ça.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

LES SECTIONS CONIQUES

Ce module traite des coniques, c'est-à-dire des figures obtenues en coupant un cône selon différents angles. Vous connaissez déjà la parabole puisque vous l'avez étudiée dans le module MAT-4108-1. Dans ce module, nous reprendrons l'étude de la parabole en la considérant cette fois comme un ensemble de points équidistants d'un point fixe appelé « foyer » et d'une droite appelée « directrice ». Le foyer des paraboles étudiées sera un point quelconque du plan et la directrice sera une droite verticale ou horizontale.

Nous nous intéresserons également au cercle, ensemble de points équidistants d'un point fixe appelé « centre ». Nous apprendrons à trouver l'équation de cercles à partir des coordonnées de leur centre et de la mesure de leur rayon ainsi que celle d'une droite tangente à un cercle en un point donné.

Nous étudierons enfin l'ellipse, ensemble de points dont la somme des distances à deux points fixes, les foyers, est constante, et l'hyperbole, ensemble de points dont la différence des distances à deux points fixes, les foyers, est constante. Pour ces deux coniques, nous nous contenterons des cas où le centre de la figure coïncide avec le point d'origine des coordonnées cartésiennes, c'est-à-dire avec le point (0, 0).

Nous verrons que chacune de ces coniques détermine trois régions dans le plan. À partir d'équations ou d'inéquations, nous pourrons représenter la région appropriée du plan et trouver le domaine et l'image associés à chacune de ces relations.

Nous ferons la démarche inverse. En effet, nous trouverons l'équation ou l'inéquation associée à la représentation graphique d'une relation conique.

Nous verrons ensuite comment trouver l'équation d'une conique à partir d'une autre conique ou de son lieu géométrique, pour finalement être en mesure de résoudre des problèmes relatifs aux coniques.

Comme vous pourrez le constater, le monde des coniques vous étonnera mais, avec de l'ordre et de la méthode, vous apprendrez à l'apprivoiser.

OBJECTIFS INTERMÉDIAIRES ET TERMINAUX DU MODULE

Le module MAT-5105-1 comporte 11 sous-modules et prévoit une durée d'apprentissage de 25 heures, réparties tel qu'il est indiqué dans le tableau ci-dessous. Les objectifs terminaux sont en caractère gras.

Objectifs	Nombres d'heures*	% (évaluation)
1	2	5 %
2	2	5 %
3	2	5 %
4	2	5 %
5	2	5 %
6	2	5 %
7	2	5 %
8	2	5 %
9	3	20 %
10	2	5 %
11	3	20 %

* Une heure est réservée à l'évaluation finale.

1. Équation générale du cercle

Trouver l'équation générale d'un cercle de la forme $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ connaissant son centre (h, k) et son rayon r. Inversement, trouver le centre (h, k) et le rayon r d'un cercle, connaissant son équation générale. Les paramètres D, E, F, h, k et r sont des nombres rationnels et le plus souvent des nombres entiers.

2. Représentation graphique d'une relation définissant un cercle

Représenter graphiquement la région déterminée par une relation définissant un cercle. De plus, trouver le domaine et l'image de cette relation et les exprimer en compréhension ou sous forme d'intervalle.

La relation peut être présentée sous l'une ou l'autre des formes suivantes.

- $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ou $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
- $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F < 0$ ou $(x - h)^2 + (y - k)^2 < r^2$
- $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F \leq 0$ ou $(x - h)^2 + (y - k)^2 \leq r^2$
- $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F > 0$ ou $(x - h)^2 + (y - k)^2 > r^2$
- $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F \geq 0$ ou $(x - h)^2 + (y - k)^2 \geq r^2$

Les paramètres D, E, F, h, k et r sont des nombres rationnels. Le centre du cercle et son rayon doivent être clairement indiqués sur le graphique.

3. Équation d'une droite tangente à un cercle

Trouver l'équation d'une droite tangente à un cercle connaissant le point de tangence (x_1, y_1) et l'équation du cercle exprimée sous la forme canonique $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ ou sous la forme générale $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$. Les paramètres x_1, y_1, h, k, r, D, E et F sont des nombres entiers.

4. Équation canonique de la parabole

Trouver l'équation canonique d'une parabole de la forme $(y-k)^2 = \pm 4a(x-h)$ ou $(x-h)^2 = \pm 4a(y-k)$ connaissant les coordonnées (h, k) de son sommet et les coordonnées (x_1, y_1) de son foyer. Le paramètre a est un nombre rationnel différent de 0, alors que h, k, x_1 et y_1 sont des nombres entiers.

De plus, trouver et représenter graphiquement l'équation d'une parabole obtenue par une translation de (h, k) unités d'une parabole, de la forme $y^2 = \pm 4ax$ ou de la forme $x^2 = \pm 4ay$, centrée à l'origine. Les constantes h et k sont des nombres entiers et a est un nombre rationnel différent de 0.

5. Représentation graphique d'une relation parabolique

Représenter graphiquement la région déterminée par une relation du deuxième degré correspondant à une parabole. De plus, trouver le domaine et l'image de cette relation et les exprimer en compréhension ou sous forme d'intervalle.

La relation peut être présentée sous l'une ou l'autre des formes suivantes.

- $(y-k)^2 = \pm 4a(x-h)$ ou $(x-h)^2 = \pm 4a(y-k)$
- $(y-k)^2 < \pm 4a(x-h)$ ou $(x-h)^2 < \pm 4a(y-k)$
- $(y-k)^2 \leq \pm 4a(x-h)$ ou $(x-h)^2 \leq \pm 4a(y-k)$
- $(y-k)^2 > \pm 4a(x-h)$ ou $(x-h)^2 > \pm 4a(y-k)$
- $(y-k)^2 \geq \pm 4a(x-h)$ ou $(x-h)^2 \geq \pm 4a(y-k)$

Le paramètre a est un nombre rationnel différent de zéro. Les paramètres h et k sont aussi des nombres rationnels mais le plus souvent des nombres entiers. Indiquer clairement sur le graphique le sommet, le foyer, l'axe de symétrie de même que la directrice de la parabole.

6. Représentation graphique d'une ellipse centrée à l'origine

Représenter graphiquement la région déterminée par une relation définissant une ellipse centrée à l'origine. Indiquer clairement sur le graphique les axes de même que les deux foyers de l'ellipse. De plus, trouver le domaine et l'image de cette relation et les exprimer en compréhension ou sous forme d'intervalle.

La relation peut être présentée sous l'une ou l'autre des formes suivantes.

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1$

Les paramètres a et b sont des nombres naturels différents de 0.

7. Représentation graphique d'une hyperbole centrée à l'origine

Représenter graphiquement la région déterminée par une relation définissant une hyperbole centrée à l'origine. Indiquer clairement sur le graphique les asymptotes, les sommets de même que les foyers de l'hyperbole. De plus, trouver le domaine et l'image de cette relation et les exprimer en compréhension ou sous forme d'intervalle.

La relation peut être présentée sous l'une ou l'autre des formes suivantes.

- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
- $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ ou $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1$
- $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} < 1$ ou $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > -1$
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \leq 1$
- $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \leq 1$ ou $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \geq -1$
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1$
- $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} > 1$ ou $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < -1$
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \geq 1$
- $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \geq 1$ ou $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \leq -1$

Les paramètres a et b sont des nombres naturels différents de 0.

8. Équation ou inéquation associée à une représentation graphique d'une relation conique

Trouver l'équation ou l'inéquation associée à la représentation graphique, avec ou sans région ombrée, de l'une ou l'autre des coniques suivantes : le cercle, la parabole, l'ellipse centrée à l'origine ou l'hyperbole centrée à l'origine. Les caractéristiques particulières à chacune des représentations graphiques, soit le rayon, le centre, le ou les sommets, le ou les foyers, le ou les axes de symétrie, la directrice et les asymptotes, selon le cas, sont clairement indiquées sur la courbe. L'équation ou l'inéquation doit être présentée sous la forme canonique.

9. Équation d'une conique à partir des caractéristiques d'une autre conique

Trouver l'équation d'une conique à partir de la description d'une autre conique dont nous connaissons l'équation ou certaines caractéristiques. Ces coniques et leurs caractéristiques respectives peuvent être les suivantes : cercle (centre et rayon), parabole (sommet, foyer, directrice) ellipse centrée à l'origine ou hyperbole centrée à l'origine (sommets, foyers, équations des asymptotes). Les caractéristiques peuvent être décrites de façon indirecte.

10. Équations et lieux géométriques

À partir de leur définition en tant que lieu géométrique, trouver l'équation de l'une ou l'autre des coniques suivantes : le cercle, la parabole, l'ellipse centrée à l'origine et l'hyperbole centrée à l'origine.

11. Problèmes relatifs aux coniques

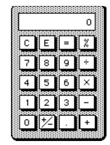
Résoudre des problèmes nécessitant l'application des notions liées aux coniques suivantes : le cercle, la parabole, l'ellipse centrée à l'origine et l'hyperbole centrée à l'origine. La résolution peut exiger de trouver l'équation décrivant une relation, de tracer le graphique, de déterminer les coordonnées de certains points et de calculer la distance entre certains points. Les équations données seront seulement présentées sous la forme canonique, sauf celles associées au cercle, qui pourront être définies aussi sous la forme générale.

ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE SUR LES PRÉALABLES

Consignes

1° Répondez autant que possible à toutes les questions.

2° L'utilisation de la calculatrice est permise.



3° Inscrivez vos réponses directement sur la feuille.

4° Ne perdez pas de temps. Si vous ne pouvez répondre à une question, passez immédiatement à la suivante.

5° Dès que vous aurez répondu à toutes les questions auxquelles il vous est possible de répondre, corrigez vos réponses à l'aide du corrigé qui suit l'épreuve diagnostique.

6° Vos réponses devront être exactes pour être considérées comme correctes. De plus, les différentes étapes de la résolution devront être équivalentes à celles qui sont suggérées.

7° Transcrivez vos résultats sur la fiche d'analyse des résultats de l'épreuve diagnostique qui suit le corrigé.

8° Prenez connaissance des activités de révision proposées pour chacune des réponses incorrectes.

9° Si toutes vos réponses sont exactes, vous possédez les préalables nécessaires pour entreprendre l'étude de ce module.

1. Quelle est la pente de la droite passant par les points $(5, -8)$ et $(-2, 7)$?

....

....

....

....

2. Trouvez les équations des droites qui satisfont les conditions ci-dessous et vérifiez vos résultats.

   a) Droite qui passe par le point $(-3, 2)$ dont la pente est $\frac{1}{2}$.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

b) Droite qui passe par le point $(-3, 2)$ dont la pente est $-\frac{3}{7}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

c) Droite horizontale qui passe par le point $(2, 7)$.

....

....

....

....

....

....

d) Droite verticale qui passe par le point (–2, –3).

....

....

....

....

....

....

3. Quelle est la pente de la perpendiculaire à une droite de pente $\frac{4}{5}$?

....

....

4. Trouvez la distance entre les points suivants.

a) (3, 7) et (3, –5)

....

....

....

....

....

b) (–4, 2) et (–7, 2)

....

....

....

....

....

c) (0, 3) et (–4, 0)

....

....

....

....

....

d) (7, –2) et (–2, 5)

....

....

....

....

....

5. Factorisez les polynômes suivants et vérifiez vos résultats.

a) $x^2 - 16x + 64$

....

....

....

....

....

b) $4x^2 + 28x + 49$

....

....

....

....

....

6. Résolvez les équations suivantes en écrivant toutes les étapes et vérifiez vos résultats.

a) $x^2 - 36 = 0$

....

....

....

....

....

b) $2x^2 = 250$

....

....

....

....

....

....

....

....

c) $x^2 + 10x - 11 = 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

d) $x^2 - 5x + 6 = 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

Corrigé

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE SUR LES PRÉALABLES

1. Soit $(x_1, y_1) = (5, -8)$ et $(x_2, y_2) = (-2, 7)$.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - (-8)}{-2 - 5} = \frac{7 + 8}{-7} = -\frac{15}{7}$$

2. a) Soit $(x_1, y_1) = (-3, 2)$ et $m = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ \frac{1}{2} &= \frac{y - 2}{x - (-3)} \\ \frac{1}{2} &= \frac{y - 2}{x + 3} \\ 1(x + 3) &= 2(y - 2) \\ x + 3 &= 2y - 4 \\ x - 2y + 3 + 4 &= 0 \\ x - 2y + 7 &= 0 \end{aligned}$$

Vérification

Soit $(x, y) = (-3, 2)$.

$$\begin{aligned} x - 2y + 7 &= 0 \\ -3 - 2(2) + 7 &= 0 \\ -3 - 4 + 7 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

b) Soit $(x_1, y_1) = (-3, 2)$ et $m = -\frac{3}{7}$.

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ -\frac{3}{7} &= \frac{y - 2}{x - (-3)} \\ \frac{-3}{7} &= \frac{y - 2}{x + 3} \\ -3(x + 3) &= 7(y - 2) \\ -3x - 9 &= 7y - 14 \\ -3x - 7y - 9 + 14 &= 0 \\ -3x - 7y + 5 &= 0 \quad \times(-1) \\ 3x + 7y - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Vérification

Soit $(x, y) = (-3, 2)$.

$$\begin{aligned} 3x + 7y - 5 &= 0 \\ 3(-3) + 7(2) - 5 &= 0 \\ -9 + 14 - 5 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

c) Puisque c'est une droite horizontale, son équation est de la forme $y = b$.

Puisque $b = 7$, alors $y = 7$.

Vérification

Soit $(x, y) = (2, 7)$.

$$\begin{aligned} y &= 7 \\ y &= 0x + 7 \\ 7 &= 0(2) + 7 \\ 7 &= 0 + 7 \\ 7 &= 7 \end{aligned}$$

d) Puisque c'est une droite verticale, son équation est de la forme $x = a$.

Puisque $a = -2$, alors $x = -2$.

Vérification

Soit $(x, y) = (-2, -3)$.

$$\begin{aligned} x &= -2 \\ x &= 0y - 2 \\ -2 &= 0(-3) - 2 \\ -2 &= 0 - 2 \\ -2 &= -2 \end{aligned}$$

3. Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leur pente est égal à -1.

Alors, $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ ou $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.

Soit $m_1 = \frac{4}{5}$, alors $m_2 = \frac{-1}{\frac{4}{5}} = -1 \times \frac{5}{4} = -\frac{5}{4}$.

4. a) Puisque les abscisses sont égales, nous n'avons qu'à faire la différence des ordonnées.

$d = |y_2 - y_1|$
$d = |-5 - 7|$
$d = |-12|$
$d = 12$

b) Puisque les ordonnées sont égales, nous n'avons qu'à faire la différence des abscisses.

$d = |x_2 - x_1|$
$d = |-7 - (-4)|$
$d = |-7 + 4|$
$d = |-3|$
$d = 3$

c) Soit $(x_1, y_1) = (0, 3)$ et $(x_2, y_2) = (-4, 0)$.

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
$d = \sqrt{(-4 - 0)^2 + (0 - 3)^2}$
$d = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}$
$d = \sqrt{16 + 9}$
$d = \sqrt{25}$
$d = 5$

d) Soit $(x_1, y_1) = (7, -2)$ et $(x_2, y_2) = (-2, 5)$.

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
$d = \sqrt{(-2 - 7)^2 + (5 - (-2))^2}$
$d = \sqrt{(-9)^2 + (7)^2}$
$d = \sqrt{81 + 49}$
$d = \sqrt{130}$
$d = 11{,}4$

5. a) C'est un trinôme de la forme $x^2 + bx + c$.

$x^2 - 16x + 64$
$x^2 - 8x - 8x + 64$
$x(x - 8) - 8(x - 8)$
$(x - 8)(x - 8)$ ou $(x - 8)^2$

Vérification

$(x - 8)(x - 8)$
$(x - 8)x + (x - 8)(-8)$
$x^2 - 8x - 8x + 64$
$x^2 - 16\,x + 64$

b) C'est un trinôme de la forme $ax^2 + bx + c$.

$4x^2 + 28x + 49$	Vérification
$4x^2 + 14x + 14x + 49$	
$2x(2x + 7) + 7(2x + 7)$	$(2x + 7)(2x + 7)$
$(2x + 7)(2x + 7)$ ou $(2x + 7)^2$	$(2x + 7)2x + (2x + 7)7$
	$4x^2 + 14x + 14x + 49$
	$4x^2 + 28x + 49$

6. a) Différence de deux carrés.

$x^2 - 36 = 0$	ou $x^2 - 36 = 0$
$(x - 6)(x + 6) = 0$, alors	$x^2 = 36$
	$x = \pm\sqrt{36}$
$x - 6 = 0$ ou $x + 6 = 0$	$x = \pm 6$
$x = 6$ $\quad$ $x = -6$	

Vérification

• Si $x = 6$, alors	ou	Si $x = -6$, alors
$x^2 - 36 = 0$		$x^2 - 36 = 0$
$(6)^2 - 36 = 0$		$(-6)^2 - 36 = 0$
$36 - 36 = 0$		$36 - 36 = 0$
$0 = 0$ Vrai		$0 = 0$ Vrai

Réponse : $x = 6$ ou $x = -6$.

N.B. – Nous aurions pu écrire $x = \pm 6$.

b) $2x^2 = 250$ ou À l'aide de la formule quadratique :

$x^2 = 125$

$x = \pm\sqrt{125}$

$x = \pm 11{,}18$

$2x^2 = 250$

$2x^2 - 250 = 0$

$a = 2$, $b = 0$ et $c = -250$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4(2)(-250)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{2\,000}}{4} = x = \frac{\pm 44{,}72}{4} = \pm 11{,}18$$

Vérification

- Si $x = 11{,}18$, alors

$$\begin{aligned} 2x^2 &= 250 \\ 2(11{,}18)^2 &= 250 \\ 2(124{,}99) &= 250 \\ 249{,}98 &\approx 250 \quad \text{Vrai} \end{aligned}$$

Si $x = -11{,}18$, alors

$$\begin{aligned} 2x^2 &= 250 \\ 2(-11{,}18)^2 &= 250 \\ 2(124{,}99) &= 250 \\ 249{,}98 &\approx 250 \quad \text{Vrai} \end{aligned}$$

Réponse : $x = 11{,}18$ ou $x = -11{,}18$.

N.B. – Nous aurions pu écrire $x = \pm 11{,}18$.

c) Trinôme de la forme $x^2 + bx + c$.

$$\begin{aligned} x^2 + 10x - 11 &= 0 \\ x^2 + 11x - 1x - 11 &= 0 \\ x(x + 11) - 1(x + 11) &= 0 \end{aligned}$$

$(x - 1)(x + 11) = 0$, alors $x - 1 = 0$ ou $x + 11 = 0$

$x = 1$ $\qquad$ $x = -11$

Vérification

- Si $x = -11$, alors ou Si $x = 1$, alors

$$x^2 + 10x - 11 = 0$$
$$(-11)^2 + 10(-11) - 11 = 0$$
$$121 - 110 - 11 = 0$$
$$0 = 0 \quad \text{Vrai}$$

$$x^2 + 10x - 11 = 0$$
$$(1)^2 + 10(1) - 11 = 0$$
$$1 + 10 - 11 = 0$$
$$0 = 0 \quad \text{Vrai}$$

Réponse : $x = -11$ ou $x = 1$.

d) Trinôme de la forme $x^2 + bx + c$.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$x^2 - 2x - 3x + 6 = 0$$
$$x(x - 2) - 3(x - 2) = 0$$
$$(x - 2)(x - 3) = 0, \text{ alors } x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 3 = 0$$
$$x = 2 \qquad\qquad x = 3$$

Vérification

- Si $x = 2$, alors Si $x = 3$, alors

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$(2)^2 - 5(2) + 6 = 0$$
$$4 - 10 + 6 = 0$$
$$0 = 0 \quad \text{Vrai}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$(3)^2 - 5(3) + 6 = 0$$
$$9 - 15 + 6 = 0$$
$$0 = 0 \quad \text{Vrai}$$

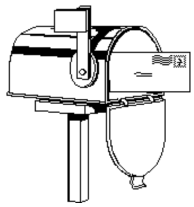
Réponse : $x = 2$ ou $x = 3$.

ANALYSE DES RÉSULTATS DE L'ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE

Questions	Réponses		Révision		À faire avant
	Correctes	Incorrectes	Section	Page	
1.			13.2.1	13.11	Sous-module 3
2. a)			13.2.3	13.18	Sous-module 4
b)			13.2.3	13.18	Sous-module 4
c)			13.2.4	13.22	Sous-module 5
d)			13.2.4	13.22	Sous-module 5
3.			13.2.4	13.15	Sous-module 4
4. a)			13.1.1	13.4	Sous-module 1
b)			13.1.1	13.4	Sous-module 1
c)			13.1.2	13.8	Sous-module 6
d)			13.1.2	13.8	Sous-module 6
5. a)			13.3.1	13.24	Sous-module 2
b)			13.3.1	13.24	Sous-module 2
6. a)			13.3.2	13.37	Sous-module 5
b)			13.3.2	13.37	Sous-module 5
c)			13.3.2	13.37	Sous-module 7
d)			13.3.2	13.37	Sous-module 7

- Si toutes vos réponses sont **correctes**, vous possédez les préalables nécessaires pour entreprendre l'étude de ce module.

- Pour chaque réponse **incorrecte**, référez-vous aux activités suggérées dans la colonne « **Révision** ». Effectuez les activités de révision avant d'entreprendre l'étude de chaque sous-module proposée dans la colonne de droite « **À faire avant** ».



SUIVEZ-VOUS CE COURS EN FORMATION À DISTANCE ?

Vous avez présentement entre les mains le matériel didactique du cours MAT-5105-1 ainsi que les devoirs qui s'y rattachent. À ce matériel est jointe une lettre de votre tutrice ou de votre tuteur. Cette lettre vous indique les différents canaux par lesquels vous pourrez communiquer avec elle ou lui (lettre, téléphone, etc.) ainsi que les heures réservées à ces prises de contact. En plus de corriger vos travaux, la tutrice ou le tuteur est la personne-ressource qui vous aidera dans votre apprentissage. Donc, n'hésitez pas à faire appel à ses services si vous éprouvez quelque difficulté.

UNE MÉTHODE GÉNÉRALE DE TRAVAIL

L'enseignement à distance est un processus d'apprentissage d'une grande souplesse, mais il exige de votre part un engagement actif. Il requiert en effet de la régularité dans l'étude et un effort soutenu. Une méthode efficace de travail vous facilitera la tâche. Un cheminement d'apprentissage constant et productif ne peut échapper aux règles suivantes.

- Fixez-vous un horaire qui vous permet d'étudier selon vos possibilités tout en tenant compte de vos loisirs et de vos activités.

- Astreignez-vous à une étude régulière et assidue.

Pour vous aider à réussir ce cours de mathématiques, voici quelques règles à suivre concernant la théorie, les exemples, les exercices et les devoirs.

La théorie

Pour assimiler correctement les notions théoriques, portez attention aux points suivants.

1° Lisez attentivement le texte et soulignez les points importants.

2° Mémorisez les définitions, les formules et les marches à suivre pour résoudre un problème donné; cela facilitera la compréhension du texte.

3° Notez, à la fin du devoir, les points que vous ne comprenez pas. Votre tutrice ou votre tuteur vous donnera alors des explications pertinentes.

4° Essayez de poursuivre votre étude même si vous butez sur un obstacle particulier. Cependant, si une difficulté importante vous empêche de poursuivre la démarche d'apprentissage, n'attendez pas d'envoyer votre devoir pour demander des explications : adressez-vous à la tutrice ou au tuteur selon les modalités prévues dans sa lettre.

Les exemples

Les exemples sont des applications de la théorie. Ils illustrent le cheminement à suivre pour résoudre les exercices. Aussi, étudiez attentivement les solutions proposées dans les exemples et refaites-les pour vous-même avant d'entreprendre les exercices.

Les exercices

Les exercices d'un sous-module respectent généralement le modèle des exemples donnés. Voici quelques suggestions pour réussir ces exercices.

1° Rédigez les solutions en prenant pour modèle les exemples présentés dans le texte. Il est important de ne pas consulter le corrigé qui se trouve à la fin du texte sur des feuilles de couleur avant d'avoir terminé les exercices.

2° Évaluez vos solutions à l'aide du corrigé uniquement après avoir fait tous les exercices. **Attention!** Vérifiez attentivement les étapes de votre solution, même si votre réponse est exacte.

3° Si vous relevez une erreur dans votre réponse ou votre solution, revoyez les notions que vous n'avez pas comprises ainsi que les exemples qui s'y rattachent. Ensuite, recommencez l'exercice.

4° Assurez-vous d'avoir réussi tous les exercices d'un sous-module avant de passer au suivant.

Les devoirs

Le cours MAT-5105-1 comprend trois devoirs. La première page de chaque devoir indique à quels sous-modules se rapportent les questions posées. Les devoirs servent à évaluer votre degré de compréhension de la matière étudiée. Ils sont également un moyen de communication avec votre tutrice ou votre tuteur.

Quand vous aurez assimilé la matière et réussi les exercices qui s'y rattachent, rédigez sans délai le devoir correspondant.

1° Faites d'abord un brouillon. Apportez à vos solutions toutes les modifications nécessaires avant de mettre au propre la réponse finale.

2° Transcrivez au crayon à la mine, de préférence, les réponses ou les solutions dans les espaces en blanc du document à retourner.

3° Accompagnez chaque réponse d'une solution claire et détaillée s'il s'agit d'une question qui exige un développement.

4° Ne postez que un devoir à la fois; nous vous le retournerons après correction.

Écrivez, dans la section « Questions de l'élève », les questions que vous désirez poser à la tutrice ou au tuteur. Cette dernière ou ce dernier vous prodiguera des conseils. Elle ou il pourra vous guider dans vos études et vous orienter, s'il y a lieu.

Dans ce cours

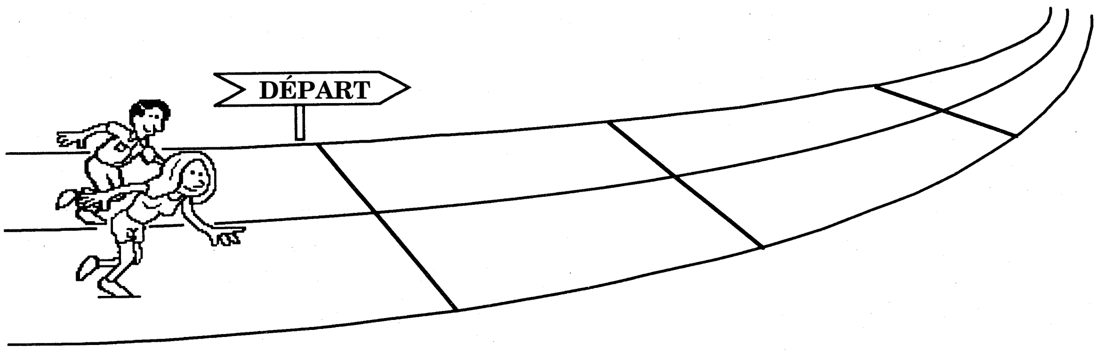
Le devoir 1 porte sur les sous-modules 1 à 7.

Le devoir 2 porte sur les sous-modules 8 à 11.

Le devoir 3 porte sur les sous-modules 1 à 11.

SANCTION

Lorsque vous aurez complété tous les travaux et si vous avez maintenu une moyenne d'au moins 60 %, vous serez autorisé à passer l'examen.



SOUS-MODULE 1

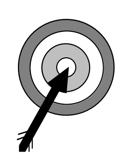
ÉQUATION GÉNÉRALE DU CERCLE

1.1 ACTIVITÉ D'ACQUISITION

Les deux pieds... dans le sable

Janie est en vacances au bord de la mer. Elle s'installe dans le sable dur mouillé par la mer qui redescend. Elle pique dans le sable un morceau de bois auquel elle fixe une corde de 20 cm de long. À l'extrémité de cette corde, elle attache un clou et elle s'amuse à observer le dessin que trace le clou sur le sable lorsqu'elle tend la corde au maximum et fait le tour du piquet de bois. Non loin d'elle, son frère, Gilbert, répète la même expérience avec une corde de 30 cm de long. Janie et Gilbert ont-ils tracé un dessin semblable? Et de quel dessin s'agit-il?

Pour atteindre l'objectif de ce sous-module, vous devrez être capable de trouver, sous la forme générale, l'équation d'un *cercle* étant donné les coordonnées de son centre (h, k) et la mesure du rayon r.



Revenons à Janie et à Gilbert. Vous l'avez sans doute deviné, ils ont tous deux tracé un cercle. Celui de Gilbert a un rayon qui mesure 30 cm; il est donc plus grand que celui tracé par Janie, car celui-ci n'a qu'un rayon de 20 cm de longueur.

Voyons maintenant quelle est l'équation d'un cercle de rayon r et dont le centre est situé à l'origine d'un plan cartésien, c'est-à-dire au point (0, 0). Rappelons d'abord que tous les points d'un cercle sont situés à une distance constante d'un point fixe appelé « centre du cercle » et que cette distance correspond au rayon du cercle. Chaque point (x, y) d'un cercle centré à l'origine est donc à une distance r du point (0, 0).

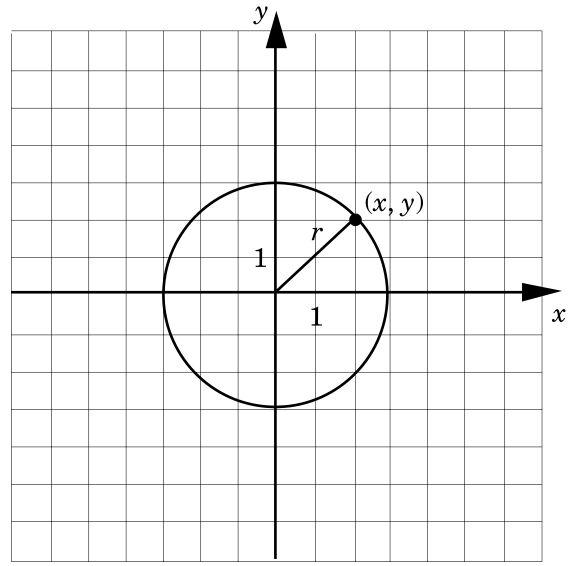
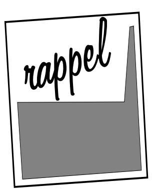


Fig. 1.1 Cercle de rayon r centré à l'origine

Avant de trouver l'équation de ce cercle, il est nécessaire de rappeler la formule pour trouver la distance entre deux points.



La distance entre les points $P_1(x_1, y_1)$ et $P_2(x_2, y_2)$ est obtenue par la formule $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Trouvons maintenant l'équation du cercle représenté à la figure 1.1.

Soit $d = r$, $(x_1, y_1) = (0, 0)$ et $(x_2, y_2) = (x, y)$, un point quelconque du cercle.

Nous pouvons donc écrire :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$r = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Élevons au ***carré*** les deux membres de l'équation.

$$(r)^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2$$
$$r^2 = x^2 + y^2$$

Finalement, nous obtenons $x^2 + y^2 = r^2$.

Cette équation est l'***équation générale d'un cercle*** de rayon r centré à l'origine.

> L'**équation générale** d'un cercle de rayon r centré à l'origine est :
> $$x^2 + y^2 = r^2$$

Exercice 1.1

1. Trouvez la mesure du rayon des cercles définis par les équations suivantes.

   a) $x^2 + y^2 = 64$ .... b) $x^2 + y^2 = 49$ ....

   c) $x^2 + y^2 = 100$ .... d) $x^2 + y^2 = 81$ ....

2. Trouvez l'équation d'un cercle centré à l'origine dont la mesure du rayon est donnée.

   a) $r = 1$...................................... b) $r = 5$.................................

   c) $r = 13$.................................... d) $r = 15$................................

Bien entendu, le cercle ne se retrouve pas toujours centré à l'origine. Il peut se déplacer dans le plan dans une direction donnée, c'est ce que nous appelons une ***translation***.

Une translation est un déplacement dans une direction constante du plan.

Soit le cercle $x^2 + y^2 = 36$. Son centre est le point $(0, 0)$ et la mesure de son rayon est de 6 unités. Déplaçons ce cercle par deux translations : la première, de 5 unités vers la droite et la deuxième, de 4 unités vers le haut.

Après le premier déplacement, le centre se situe au point (5,0).

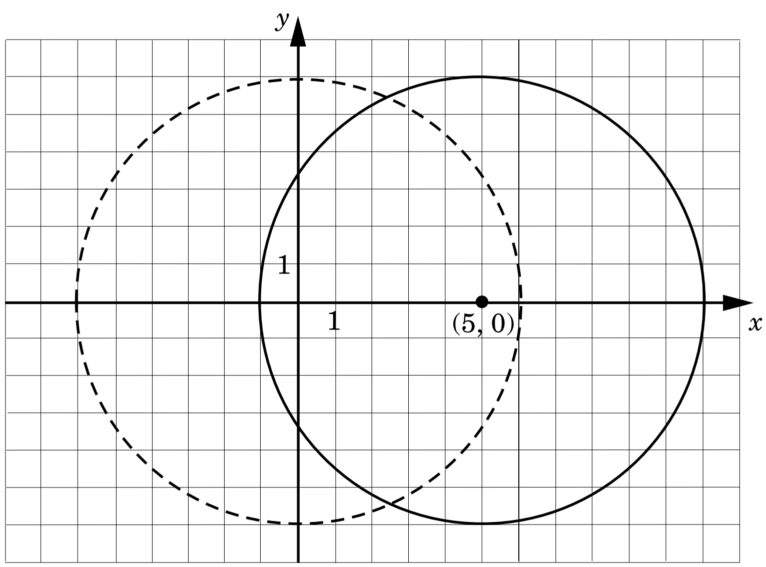


Fig. 1.2 Translation du cercle $x^2 + y^2 = 36$ de 5 unités vers la droite

Après le deuxième déplacement, il est au point (5,4).

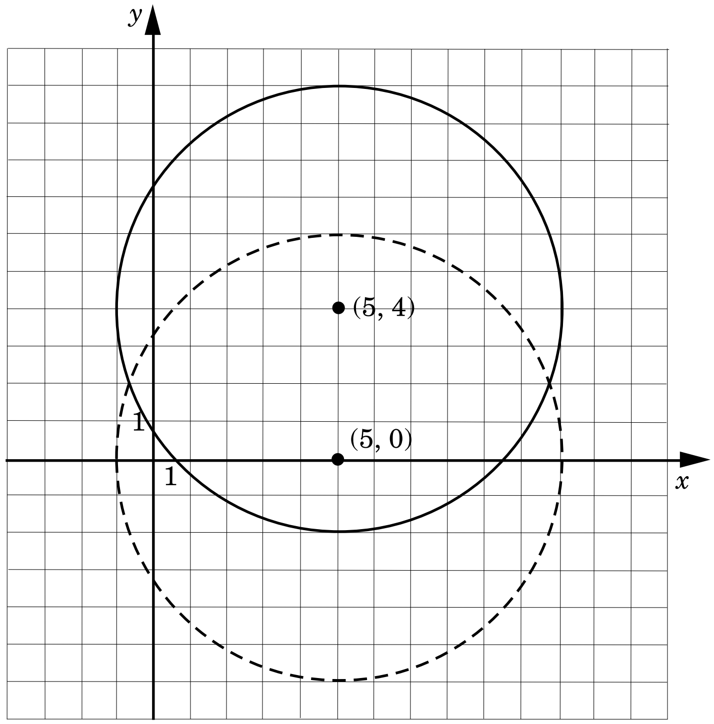


Fig. 1.3 Deuxième translation du cercle $x^2 + y^2 = 36$ de 4 unités vers le haut

Nous aurions pu obtenir le même résultat par une seule translation, la translation (5, 4) qui déplace la figure de 5 unités vers la droite et de 4 unités vers le haut.

Comme une translation ne modifie pas la figure, l'image obtenue par cette translation de (5, 4) unités est un cercle dont la mesure du rayon est toujours de 6 unités. Toutefois, le centre de ce cercle est maintenant situé au point (5, 4). Pour trouver l'équation du cercle image obtenu par cette translation, nous devons nous rappeler que **tous** les points (x, y) du cercle sont à 6 unités du centre (5, 4). Appliquons la formule de la distance.

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ où $d = 6$, $(x_1, y_1) = (5, 4)$ et $x_2, y_2 = (x, y)$

$$6 = \sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2}$$

Élevons au carré les deux membres de l'équation.

$$(6)^2 = \left(\sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2}\right)^2$$

$$36 = (x-5)^2 + (y-4)^2$$

$$\text{ou } (x-5)^2 + (y-4)^2 = 36$$

Si nous faisons subir à un cercle de rayon r centré à l'origine une translation de (h, k) unités, le centre se déplace jusqu'au point (h, k) et la mesure du rayon r demeure la même. Tous les points (x, y) du cercle sont donc toujours à une distance r du point (h, k).

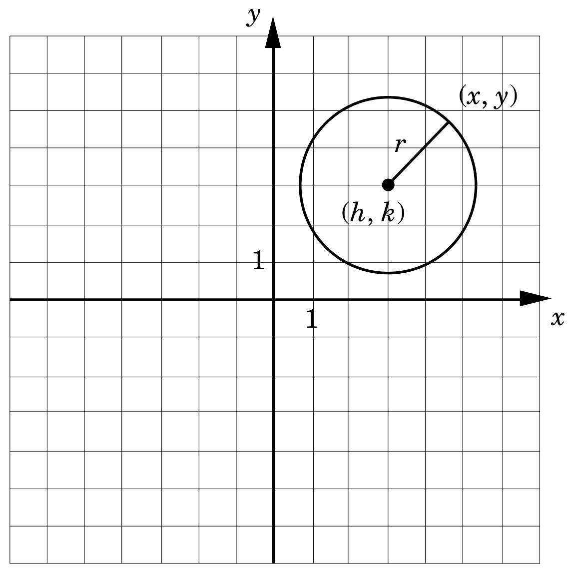


Fig. 1.4 Cercle de rayon r centré au point (h, k)

Nous pouvons donc utiliser la formule de la distance entre deux points.

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ où $d = r$, $(x_1, y_1) = (h, k)$ et $(x_2, y_2) = (x, y)$.

$$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

$$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

$$\text{ou } (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Cette équation s'appelle l'***équation canonique*** du cercle.

L'**équation canonique** d'un cercle de centre (h, k) et de rayon r est :

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Exemple 1

Trouvons l'équation du cercle tracé par Janie si nous lui faisons subir une translation de (9, 6) unités et représentons-la graphiquement.

Puisque le cercle subit une translation de (9, 6) unités, le centre devient le point (9, 6). L'équation est donc $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ où $(h, k) = (9, 6)$ et $r = 20$.

$$\therefore \ (x - 9)^2 + (y - 6)^2 = 400$$

N. B. – Pour tracer ce cercle, il suffit de placer la pointe sèche du compas au point (9, 6) et d'ouvrir le compas de 20 unités.

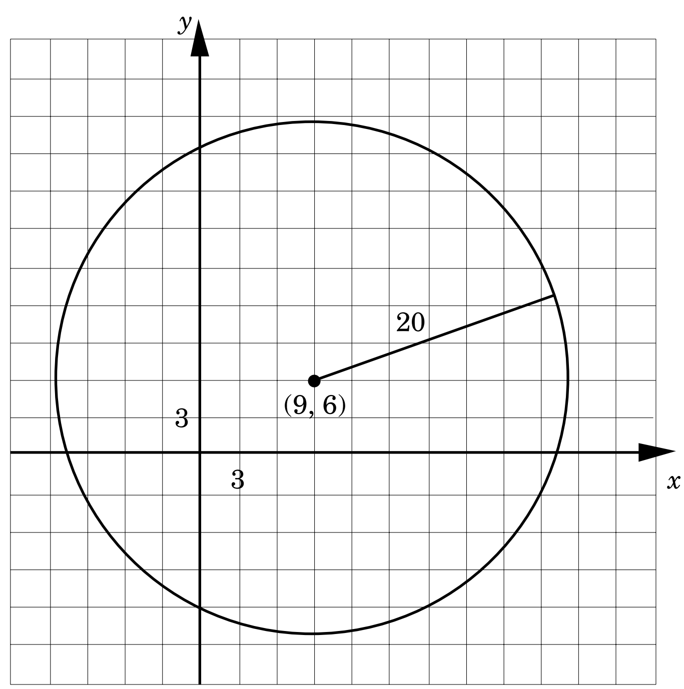


Fig. 1.5 Représentation graphique du cercle tracé par Janie après avoir subi une translation de (9, 6) unités

? Trouvez l'équation du cercle tracé par Gilbert et représentez-le graphiquement s'il subit une translation de (–5, 5) unités.

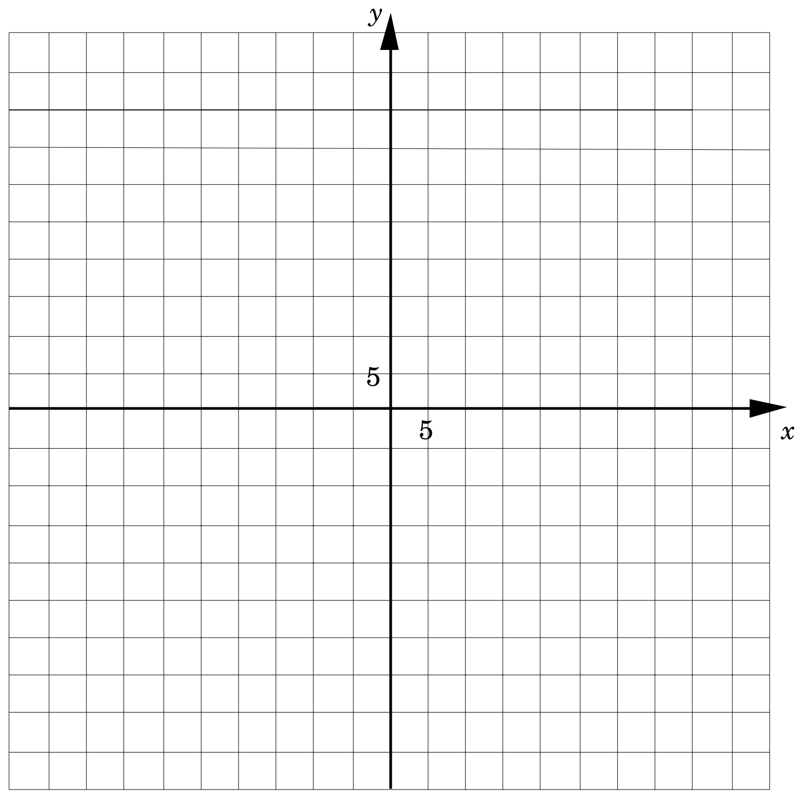


Fig. 1.6 Plan cartésien

Puisque le cercle subit une translation de $(-5, 5)$ unités, le centre devient le point $(-5, 5)$.

L'équation est donc :
$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ où $(h, k) = (-5, 5)$ et $r = 30$.

$$(x - (-5))^2 + (y - 5)^2 = 30^2$$
$$(x + 5)^2 + (y - 5)^2 = 900$$

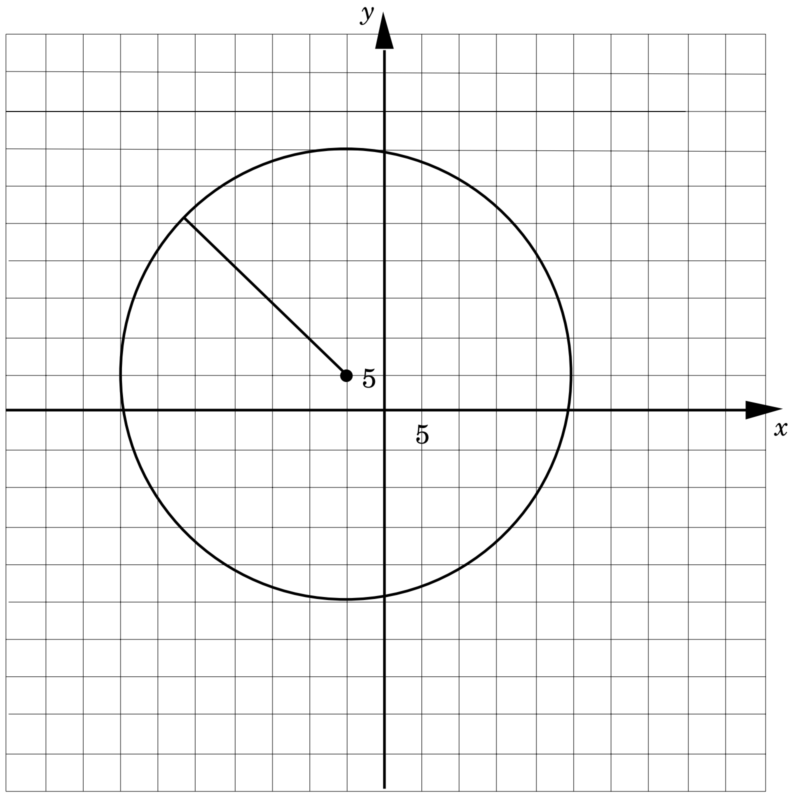


Fig. 1.7 Cercle d'équation $(x + 5)^2 + (y - 5)^2 = 900$

? Soit le cercle ci-contre centré à l'origine. Représentez graphiquement le cercle obtenu en faisant subir au cercle ci-contre une translation de (3, 2) unités. Quelles sont les équations du cercle représenté ci-contre et du cercle obtenu par translation?

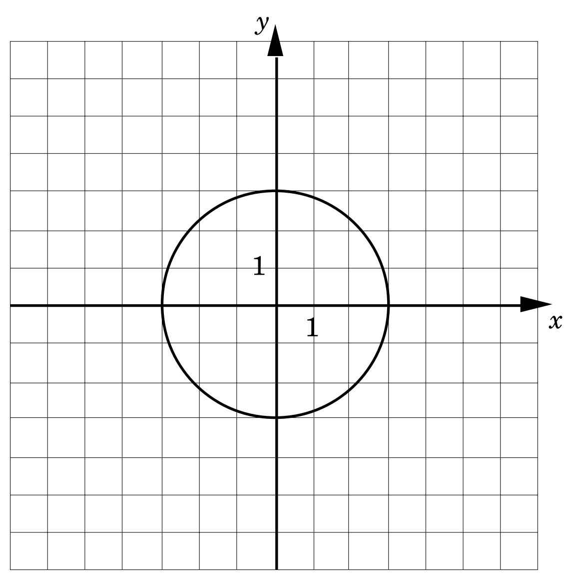


Fig. 1.8 Cercle centré à l'origine dont le rayon mesure 3 unités

Donnez :

a) l'équation du cercle centré à l'origine;

....

b) l'équation du cercle obtenu par translation.

....

Solution

L'équation du cercle centré à l'origine est $x^2 + y^2 = 9$, car son rayon mesure 3 unités. L'équation du nouveau cercle est $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

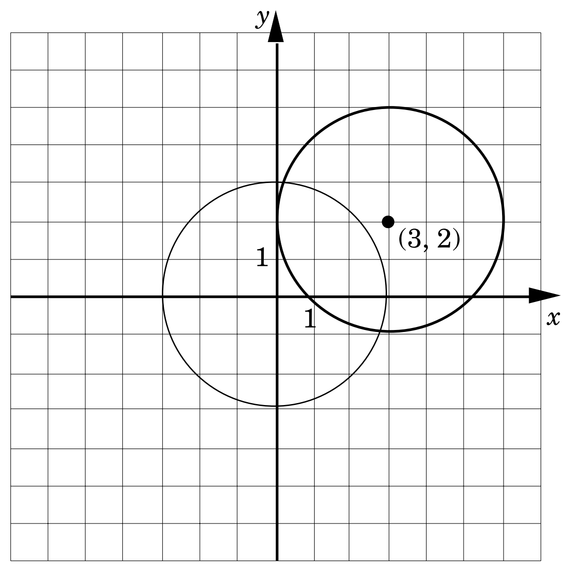
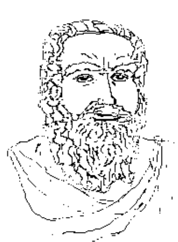


Fig. 1.9 Cercles d'équations $x^2 + y^2 = 9$ et $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$



Saviez-vous que...

... le rayon d'un cercle ne correspond pas toujours à un nombre entier? Il s'agit parfois d'un nombre irrationnel. Ainsi, dans les cercles d'équations $x^2 + y^2 = 2$ et $x^2 + y^2 = 3$, les rayons sont respectivement de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ unités.

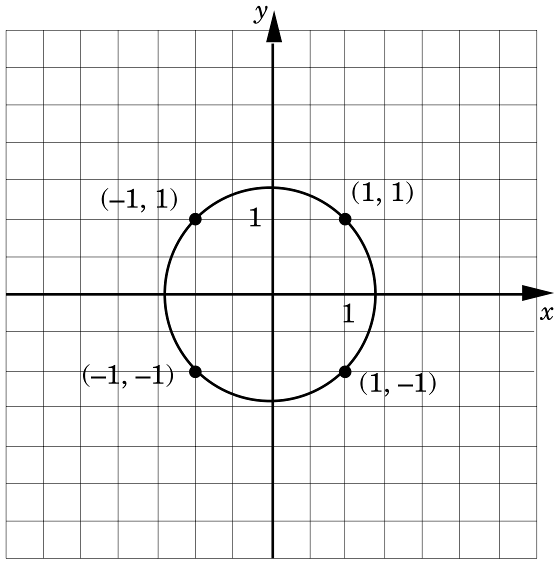


Fig. 1.10 Cercle d'équation
$x^2 + y^2 = 2$

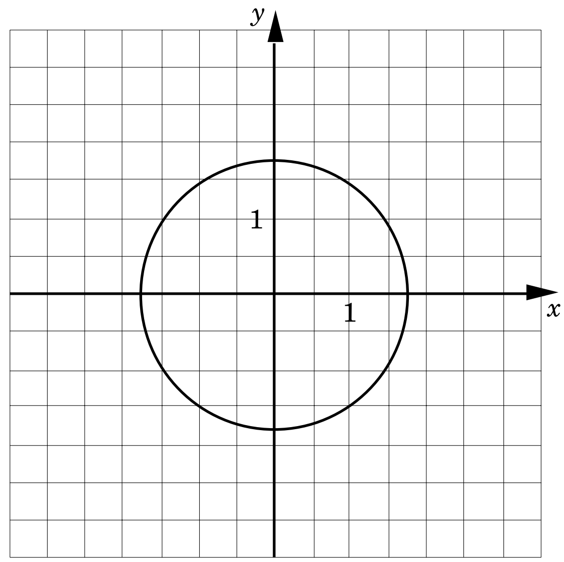


Fig. 1.11 Cercle d'équation
$x^2 + y^2 = 3$

L'équation $x^2 + y^2 = 2$ est une équation diophantienne, car elle possède quatre solutions entières (représentées par des points). Par contre, l'équation $x^2 + y^2 = 3$ n'est pas diophantienne, car elle n'a aucune solution entière. En effet, aucun de ses points (x, y) n'est formé de deux coordonnées entières.

Diophante, qui a donné son nom à ce type d'équation, est un mathématicien grec qui a vécu vers le III[e] siècle après J.-C.

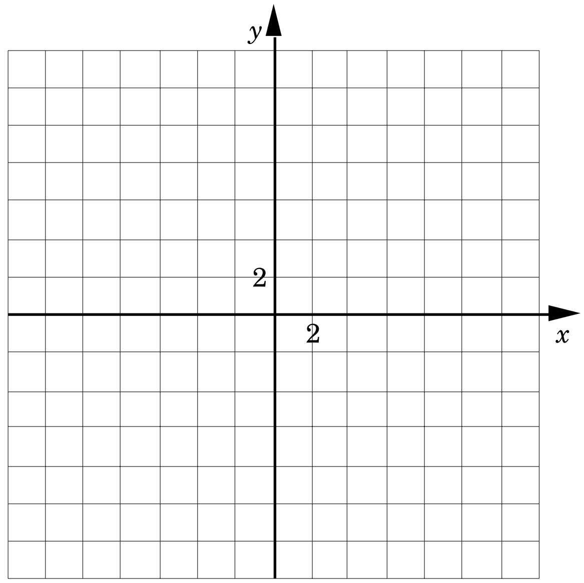
Exercice 1.2

1. Trouvez l'équation du cercle obtenu par la translation indiquée et représentez-le graphiquement.

   a) Translation de (0, 4) unités du cercle d'équation $x^2 + y^2 = 36$.

   Équation :

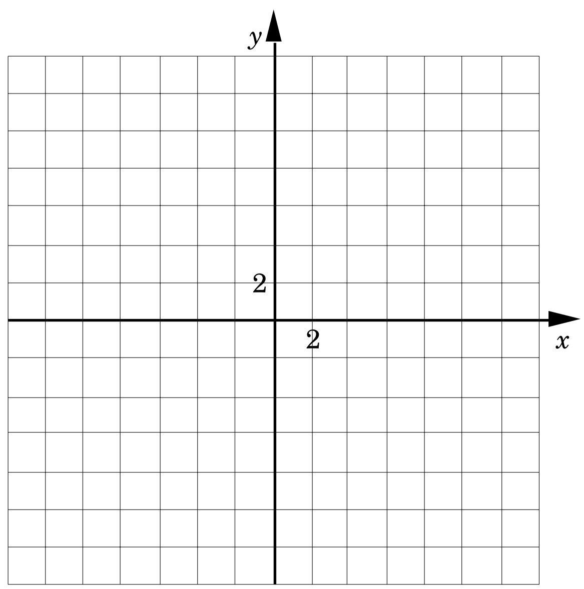
   ....



   b) Translation de (–3, 0) unités du cercle d'équation $x^2 + y^2 = 25$.

   Équation :

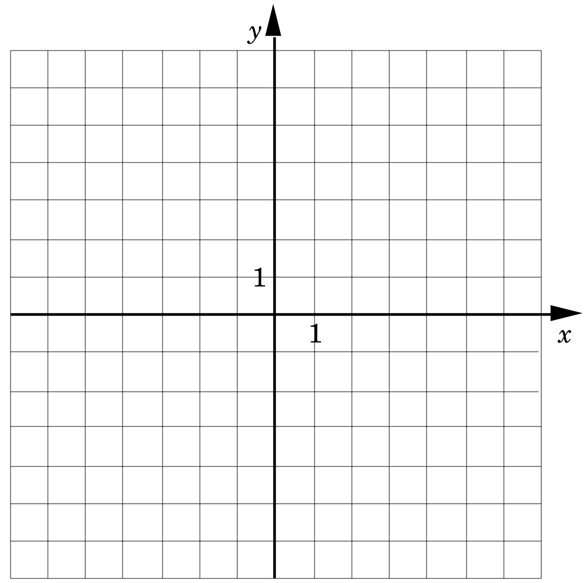
   ....



c) Translation de (3, −2) unités du cercle d'équation $x^2 + y^2 = 9$.

Équation :

....

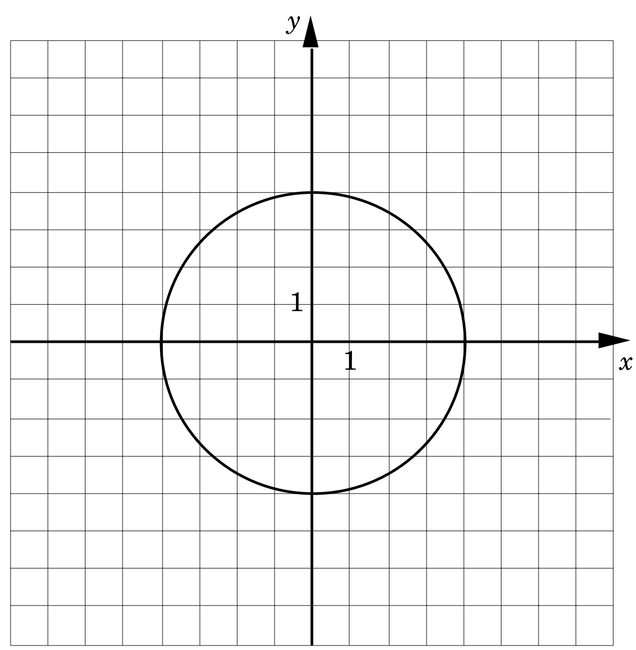


2. Représentez sur le plan cartésien donné le cercle obtenu par la translation indiquée et donnez l'équation.

a) Translation de (−4, 0) unités.

Équation :

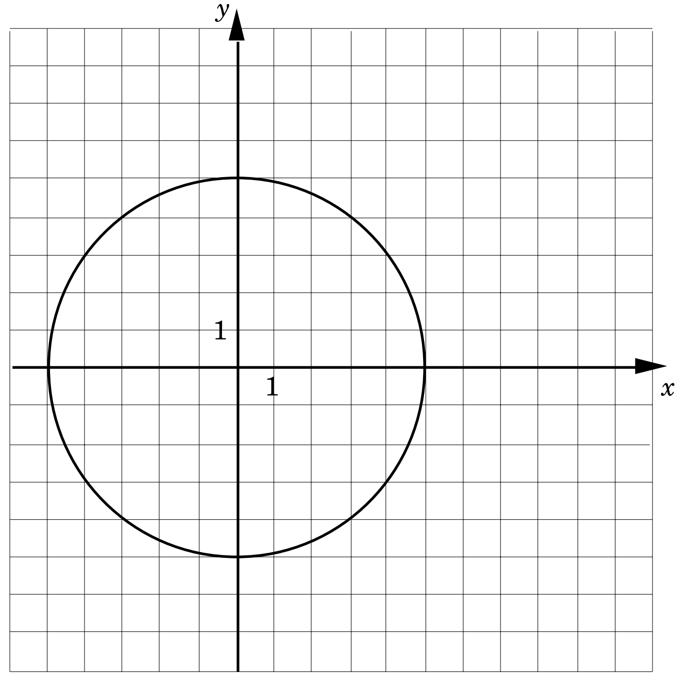
....



b) Translation de (4, 3) unités.

Équation :

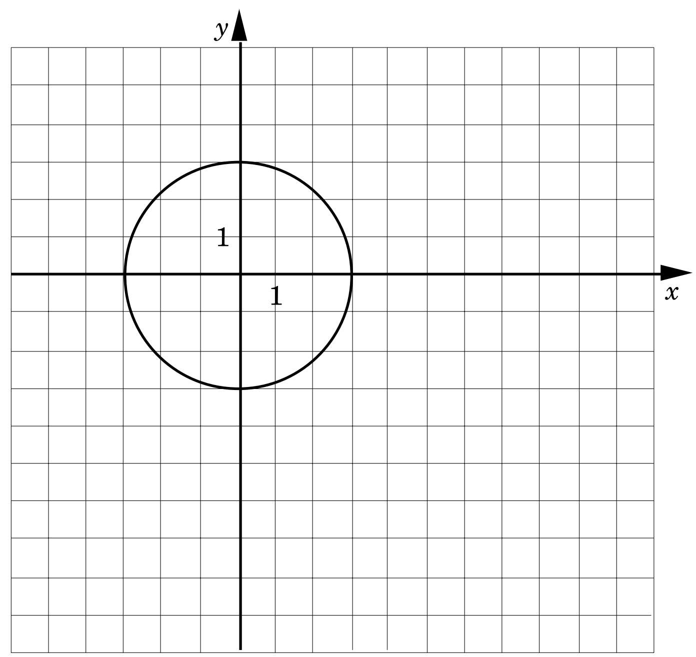
....



c) Translation de (6, –5) unités.

Équation :

....



Maintenant que nous connaissons l'équation canonique d'un cercle de rayon r centré au point (h, k), voyons comment nous pouvons exprimer cette équation sous une autre forme.

Reprenons notre cercle centré à l'origine de rayon 6. Nous lui avons fait subir une translation de (5, 4) unités et la mesure du rayon est demeurée la même, soit 6 unités. Nous avons trouvé que son équation canonique est $(x-5)^2+(y-4)^2=36$.

Nous pouvons transformer cette équation en effectuant les carrés et en réduisant les termes semblables.

$$\begin{aligned}(x-5)^2+(y-4)^2&=36\\ x^2-10x+25+y^2-8y+16&=36\\ x^2+y^2-10x-8y+25+16-36&=0\\ x^2+y^2-10x-8y+5&=0\end{aligned}$$

Cette dernière équation est appelée « équation générale du cercle » de centre (5, 4) et de rayon dont la mesure égale 6.

Cette équation est de la forme $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ où $D=-10$, $E=-8$ et $F=5$.

Exemple 2

Soit un cercle de centre $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ dont la mesure du rayon est de 2 unités.

L'équation canonique de ce cercle est $(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=2^2$.

Effectuons les carrés et réduisons les termes semblables.

$$\begin{aligned}x^2-2x+1+y^2-y+\frac{1}{4}&=4\\ x^2+y^2-2x-y+\frac{4}{4}+\frac{1}{4}-\frac{16}{4}&=0\\ x^2+y^2-2x-y-\frac{11}{4}&=0\end{aligned}$$

Cette équation est de la forme $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ où $D=-2$, $E=-1$ et $F=\frac{-11}{4}$.

L'**équation générale d'un cercle** est :

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Pour trouver l'équation générale d'un cercle dont le centre (h, k) et la mesure du rayon r sont donnés, nous devons :

1° écrire l'équation du cercle sous sa forme canonique $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$;

2° effectuer les carrés;

3° réduire les termes semblables et les ordonner pour obtenir l'équation sous la forme $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Appliquons cette méthode de travail dans l'exemple suivant.

Exemple 3

Trouvons l'équation générale du cercle de centre (7, −2) et dont le rayon mesure 4 unités.

$$(x - 7)^2 + (y + 2)^2 = 4^2$$
$$x^2 - 14x + 49 + y^2 + 4y + 4 = 16$$
$$x^2 + y^2 - 14x + 4y + 37 = 0$$

? Retrouvez parmi ces équations du deuxième degré à deux variables les quatre équations représentant des cercles.

① $5x^2 + 6y^2 = 45$

② $3x^2 + 3y^2 - 9x + 12y - 27 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 40 = 0$

④ $6x^2 + 6y^2 - 36x + 48y - 98 = 0$

⑤ $x^2 - y^2 - 7x - 26y + 64 = 0$

⑥ $x^2 - 4x + 18y + 12 = 0$

⑦ $9x^2 + 9y^2 - 81x + 108y + 100 = 0$

⑧ $y^2 + x^2 - 4y + 80 = 0$

Solution

Vous devriez avoir trouvé les équations ②, ③, ④ et ⑦. L'équation ③ est écrite correctement sous la forme générale $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ où $D = -8$, $E = 6$ et $F = 40$. Les équations ②, ④ et ⑦ sont écrites sous la forme générale mais il suffit de diviser tous les coefficients par 3 (pour l'équation ②), par 6 (pour l'équation ④) et par 9 (pour l'équation ⑦) pour obtenir la forme générale $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

N.B. – Dans toutes les autres équations, les coefficients de x^2 et y^2 ne peuvent être ramenés à 1.

Exercice 1.3

Trouvez l'équation générale des cercles suivants connaissant leur centre et la mesure de leur rayon.

1. $(0, -4)$ et $r = 4$.
2. $(-7, -5)$ et $r = 8$.
3. $(-2, 2)$ et $r = 2$.
4. $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$ et $r = \frac{1}{2}$.

Exemple 4

Trouvons le centre et la mesure du rayon du cercle dont l'équation est $(x - 3)^2 + (y + 9)^2 = 16$.

Écrivons cette équation sous la forme canonique.
$(x - 3)^2 + (y - (-9))^2 = 4^2$, où $h = 3$, $k = -9$ et $r = 4$.

Le cercle a donc comme centre $(3, -9)$ et la mesure de son rayon est 4.

? Trouvez le centre et la mesure du rayon du cercle dont l'équation est $(x + 5)^2 + y^2 = 25$.

Forme canonique : ....

h = ... k = ... r = ... C(.............)

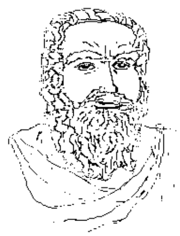
Solution

Sa forme canonique est $(x - (-5))^2 + (y - 0)^2 = 5^2$.
Alors, $h = -5$, $k = 0$, $r = 5$ et $C(-5, 0)$.

Exercice 1.4

Trouvez le centre et la mesure du rayon des cercles donnés en complétant le tableau suivant.

Équation	Centre	Rayon
1. $(x - 7)^2 + (y + 8)^2 = 25$		
2. $x^2 + (y - 9)^2 = 144$		
3. $(x + 14)^2 + (y - 10)^2 = 100$		
4. $x^2 + y^2 = \frac{9}{16}$		



Saviez-vous que...

... les symboles que nous utilisons dans certaines formules n'ont pas toujours été ceux que nous connaissons aujourd'hui?

Pensons au symbole ***racine carrée*** ($\sqrt{\ }$) utilisé dans la formule de la distance. Celui que nous utilisons de nos jours est d'origine germanique et constitue peut-être une déformation de la lettre « r ». Nous l'utilisons depuis le XVI^e siècle. Auparavant, nous utilisions le symbole ci-contre qui exprimait le mot *radix* (racine, en latin) et qui fut utilisé la première fois par Léonard de Pise en 1220.

Fig. 1.12 Ancien symbole de la racine carrée

Quant au symbole π que nous utilisons pour trouver l'aire ou la circonférence d'un cercle, il fut mis à la mode en Angleterre vers 1700. Remarquons qu'en 1859, Benjamin Pierce, professeur à Harvard, avait proposé le symbole ci-contre pour désigner la lettre pi.

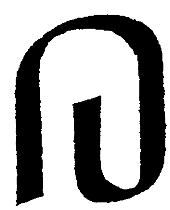


Fig. 1.13 Ancien symbole de la lettre pi

Et si nous pensons à une autre formule plus ou moins connexe au cercle, il y a le symbole de la racine cubique ($\sqrt[3]{\ }$) qui nous permet de trouver le rayon d'une sphère quand nous en connaissons le volume $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. En 1525, un mathématicien allemand, Christoff Rudolff, créait ce symbole formé de trois radicaux accolés les uns aux autres. Le symbole employé de nos jours est d'origine française et date du XVII^e siècle.

Fig. 1.14 Ancien symbole de la racine cubique

Essayons maintenant de trouver le centre et la mesure du rayon d'un cercle à partir de son équation générale.

Pour ce faire, nous devons ramener l'équation générale sous sa forme canonique à l'aide de la **complétion du carré**. En effet, la forme canonique contient deux ***carrés parfaits***, soit $(x - h)^2$ et $(y - k)^2$.

Un carré parfait est un polynôme dont les facteurs sont identiques. Ainsi, $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)(x + 2) = (x + 2)^2$ est un carré parfait.

La forme générale d'un carré parfait est :

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

Prenons la forme $x^2 + 2ax + a^2$. Le coefficient de x est $2a$ et le terme constant est a^2. La « clé » de la complétion du carré est de trouver la relation qui existe entre $2a$ et a^2. Divisons $2a$ par 2 et élevons le résultat au carré : nous obtenons a^2. En effet, $\left(\frac{2a}{2}\right)^2 = a^2$.

? Complétez les expressions suivantes de façon à obtenir des carrés parfaits.

$x^2 + 6x$ .... $x^2 - 3x$ .... $y^2 + 8y$ ....

Les carrés parfaits obtenus sont respectivement :

$x^2 + 6x + 9$ $x^2 - 3x + \frac{9}{4}$ $y^2 + 8y + 16$

car $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2 = 9$ $\left(\frac{-3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ et $\left(\frac{8}{2}\right)^2 = 4^2 = 16$

Exemple 5

Trouvons le centre et la mesure du rayon du cercle dont l'équation est $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 11 = 0$.

- Regroupons les termes en x et ceux en y et plaçons le terme constant dans le membre de droite de l'équation.

$$(x^2 - 8x + ...) + (y^2 + 4y + ...) = -11$$

- Complétons les carrés des termes en x et en y et balançons l'équation.

rappel *Pour obtenir une équation équivalente, nous devons additionner une même quantité aux deux membres de l'équation.*

$$\left(x^2 + 8x + \left(\frac{-8}{2}\right)^2\right) + \left(y^2 + 4y - \left(\frac{4}{2}\right)^2\right) = -11 + \left(\frac{-8}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2$$

$$(x^2 - 8x + 4^2) + (y^2 + 4y + 2^2) = -11 + 16 + 4$$

- Écrivons l'équation sous la forme canonique.
  $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 9$ ou $(x - 4)^2 + (y - (-2))^2 = 3^2$

- Trouvons le centre et la mesure du rayon : C$(4, -2)$ et $r = 3$.

  N.B. – Si, dans l'équation du cercle, le coefficient de x^2 et de y^2 est différent de 1, vous devez diviser tous les termes de l'équation par ce coefficient avant de commencer la complétion du carré.

Pour trouver le centre (h, k) et la mesure du rayon r d'un cercle dont l'équation générale est donnée, nous devons :

1° regrouper les termes en x et ceux en y et placer le terme constant dans le membre de droite de l'équation :
$x^2 + Dx + ... + y^2 + Ey + ... = -F$;

2° compléter les carrés des termes en x et en y et balancer l'équation :

$$\left(x^2 + Dx + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right) + \left(y^2 + Ey - \left(\frac{E}{2}\right)^2\right) = -F + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 ;$$

3° écrire l'équation sous la forme canonique :

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2;$$

4° trouver le centre C(h, k) et la mesure du rayon r.

Appliquons cette méthode de travail dans l'exemple suivant.

? Trouvez le centre et le rayon du cercle $4x^2 + 4y^2 + 8x - 4y - 11 = 0$ en complétant les étapes suivantes.

Nous devons d'abord diviser tous les termes par 4 pour avoir une équation de la forme $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

$$x^2 + y^2 + ... x - ...... y - ...... = 0$$

Ensuite, nous devons suivre les étapes expliquées précédemment.

1° $(x^2$ ....$) + (y^2$ ....$) =$ ....

2° $\left(x^2 + 2x + \left(\text{.....}\right)^2\right) + \left(y^2 - y + \left(\text{.....}\right)^2\right) = \frac{11}{4} + \text{.....} + \text{.....}$

$\left(x^2 + 2x + \text{.....}\right) + \left(y^2 - y + \text{.....}\right) = \frac{11}{4} + \text{.....} + \text{.....}$

3° $(x + \text{.....})^2 + (y - \text{.....})^2 = \text{.....}$ ou $(x - \text{........})^2 + (y - \text{.......})^2 = \text{.....}^2$

4° C(...............) et r = ...

Votre solution est exacte si elle est conforme à celle qui suit. L'équation de la forme $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ est $x^2 + y^2 + 2x - y - \frac{11}{4} = 0$.

1° $(x^2 + 2x + \ldots\ldots) + (y^2 - y + \ldots\ldots) = \frac{11}{4}$

2° $\left(x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2\right) + \left(y^2 - y + \left(\frac{-1}{2}\right)^2\right) = \frac{11}{4} + \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2$

$(x^2 + 2x + (1)^2) + \left(y^2 - y + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{11}{4} + \frac{4}{4} + \frac{1}{4}$

3° $(x + 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2$ ou $(x - (-1))^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 2^2$

4° $C\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ et $r = 2$

À vous maintenant de faire les exercices suivants.

Exercice 1.5

Écrivez les équations suivantes sous la forme canonique et déduisez-en le centre et la mesure du rayon.

1. $x^2 + y^2 - x + 4y + 4 = 0$

   C(..............) et r = ...

2. $x^2 + y^2 + 10x = 0$

   C(..............) et r = ...

3. $4x^2 + 4y^2 + 20x - 24y - 3 = 0$

C(.............) et r = ...

4. $x^2 + y^2 + 3x = 0$

C(.............) et r = ...

Vous voilà rendu à l'étape de faire un bilan des connaissances acquises tout au long de ce sous-module. Un peu plus de pratique sera fort utile!

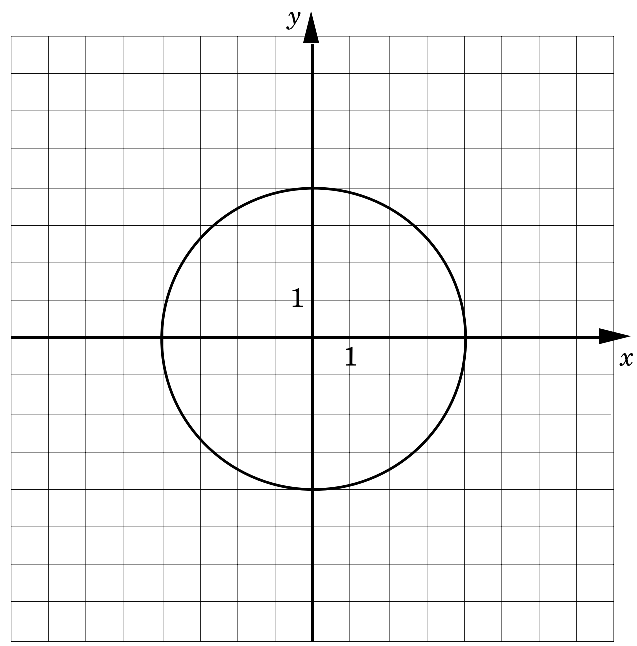
1.2 EXERCICES DE CONSOLIDATION

1. Représentez sur le plan cartésien donné le cercle obtenu par la translation indiquée et donnez-en l'équation.

Translation de (–2, 4) unités.

Équation :

....

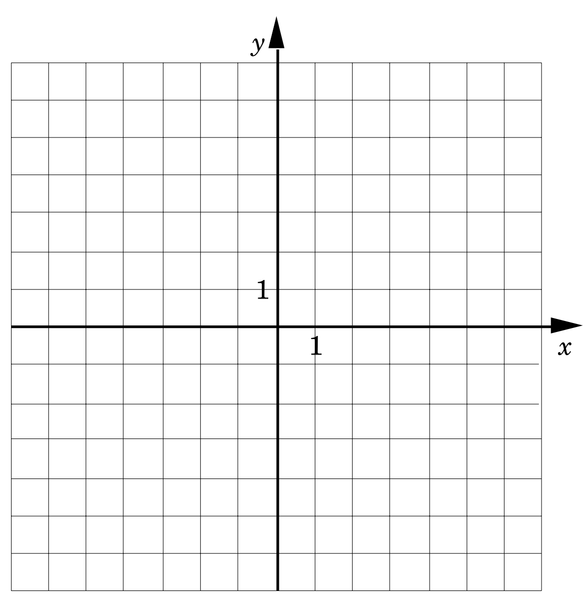


2. Trouvez l'équation du cercle obtenu par la translation indiquée et représentez-le graphiquement.

Translation de (–2, –1) unités du cercle d'équation $x^2 + y^2 = 16$.

Équation :

....



3. Quelle est l'équation générale du cercle ayant son centre au point C(8, 0) et dont le rayon mesure 5?

4. Trouvez l'équation générale du cercle de centre C(0, −3) et dont le rayon mesure 3.

5. Trouvez le centre et la mesure du rayon des cercles ayant les équations suivantes.

   a) $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 13 = 0$

   b) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$

6. Trouvez l'équation canonique, le centre et la mesure du rayon des cercles suivants.

   a) $x^2 + y^2 - x - y - \frac{1}{2} = 0$

b) $9x^2 + 9y^2 - 18x + 6y - 26 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 14x + 24 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 4x - 10y - 35 = 0$

7. Quelle est l'équation générale du cercle centré à $C\left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{4}\right)$ dont le rayon mesure $\frac{1}{4}$?

1.3 ACTIVITÉ DE SYNTHÈSE

1. Que représente r dans l'équation du cercle?

   ....

2. Complétez les phrases suivantes.

   a) L'équation d'un cercle de rayon r et centré à l'origine est ....

   b) L'équation $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ est celle du cercle d'équation ………………………… qui a subi une translation de ....……unités.

   c) Si l'équation d'un cercle est $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, le centre de ce cercle est .... et la mesure de son rayon est ....

   d) L'équation générale d'un cercle est ....

   e) Pour trouver l'équation générale d'un cercle dont le centre (h, k) et la mesure du rayon r sont donnés, nous devons :

      1° écrire l'équation du cercle sous sa forme canonique ....;
      2° effectuer les ....;
      3° réduire les termes semblables et les ordonner pour obtenir l'équation sous la forme ....

f) Pour trouver le centre (h, k) et la mesure du rayon r d'un cercle dont l'équation générale est donnée, nous devons :

1° regrouper les termes en .... et ceux en .... et placer le terme .... dans le membre de droite de ....
$x^2 + Dx + \ldots + y^2 + Ey + \ldots\ldots = -F$;

2° compléter les .... des termes en x et en y et .... l'équation;

3° écrire l'équation sous la forme .... : .... ;

4° trouver le centre .... et la mesure du rayon ....

1.4 LA PAGE DES MATHOPHILES

Partons du diamètre

Si A(2, 7) et B(–4, 15) sont les extrémités d'un diamètre d'un cercle, trouvez l'équation générale de ce cercle.

N.B. – Il vous suffit de déduire les coordonnées du centre et la mesure du rayon.