GUIDE D'APPRENTISSAGE

MATHÉMATIQUE FBD

RÉSOLUTION

MAT-5171-2 SN

TOME 1

MODÉLISATION ALGÉBRIQUE ET GRAPHIQUE

EN CONTEXTE FONDAMENTAL 2

CONFORME AU NOUVEAU PROGRAMME

SOFAD

GUIDE D'APPRENTISSAGE

MATHÉMATIQUE FBD

RÉSOLUTION

MAT-5171-2 SN

TOME 1

MODÉLISATION ALGÉBRIQUE ET GRAPHIQUE

EN CONTEXTE FONDAMENTAL 2

SOFAD

Gestion de projets :
Nancy Mayrand
Isabelle Tanguay

Conception pédagogique :
Jean-Claude Hamel

Rédaction :
Jean-Claude Hamel
Jonathan Lafond
Jean-François Cardin
Stéphane Laplante

Révision pédagogique :
Valériane Passaro
Déborah Nadeau Parent

Révision docimologique :
Stephan Bertrand

Révision scientifique :
Jean-François Cardin

Révision linguistique :
Nadia Leroux

Conception graphique et couverture :
Mylène Choquette

Commandes graphiques :
Olivier Arsenault
Marie-Chantal Beaulieu

Production et illustrations :
Alphatek

Lecture d'épreuves :
Olivier Arsenault
Julie Doyon
Carl-Abel Melançon

Correction d'épreuves :
Ginette Choinière

Crédits photos
SHUTTERSTOCK
C1 © everything possible • p. 2 © chombosan • p. 3h © xieyuliang • p. 3b © AlexandrBognat • p. 4 © Concept Photo • p. 6 © Chesky • p. 8 © iurii • p. 15 © Kittinan Pinijgarn • p. 17 © phyZick • p. 21 © BAIVECTOR • p. 24 © Eviled • p. 25 © Zoltan Major • p. 27 © won gou choi • p. 28 © Ipek Morel • p. 32 © Nickolay Grigoriev • p. 34 © Nickolay Grigoriev • p. 36 © Andrey Burkov • p. 40 © Phonlamai Photo • p. 41 © mikser45 • p. 44-45 © LVM • p. 48 © Monkey Business Images • p. 49 © Voyagerix • p. 56 © Zastolskiy Victor • p. 57 © Benoit Daoust • p. 58 © Pakhnyushchy • p. 59 © cynoclub • p. 60 © I-ing • p. 61 © Vector FX • p. 61 © BYUNGSUK KO • p. 62 © Matveev Aleksandr • p. 64 © pitagchai • p. 65h © Gubin Yury • p. 65b © Monkey Business Images • p. 66 © ian Tessier • p. 71 © Patchamol Jensatienwong • p. 73 © Marc Bruxelle • p. 77 © Dergausov • p. 82 © MimaCZ • p. 85 © Bart Sadowski • p. 86 © ambrozinio • p. 88 © ModernNomads • p. 93 © saicle • p. 95 © -strizh- • p. 97 © monticello • p. 100 © Champ008 • p. 105 © Alena Ohneva • p. 118 © Monkey Business Images • p. 119 © Taras Kushnir • p. 120 © Ramunas Bruzas • p. 122 © Dean Drobot • p. 124 © Peter Maerky • p. 125h © Neil Lockhart • p. 125b © Tom Reichner • p. 126g © Sam Carrera • p. 126d © Bildagentur Zoonar GmbH • p. 127 © Jed Packer • p. 129g © Eric Isselee • p. 129d © Eric Isselee • p. 132 © BGSmith • p. 134 © SFIO CRACHO • p. 135 © IrinaK • p. 137 © Volodymyr Burdiak • p. 143 © antishock • p. 148 © Leonardo da • p. 149 © Matt Mohd • p. 150 © wellphoto • p. 151 © Who is Danny • p. 152 © zlikovec • p. 162 © pistolseven p. 173 © Nickolay Grigoriev • p. 175 © BT Image • p. 176 © ssguy • p. 177 © oliveromg • p. 186 © Halfpoint • p. 188 © VCoscaron • p. 189 © alphaspirit • p. 191 © Monkey Business Images • p. 192h © Fer Gregory • p. 192b © Pakhnyushchy • p. 211 © goku4501

Légende : d = droite c = centre g = gauche
h = haut b = bas

© SOFAD 2018
Tous droits de traduction et d'adaptation, en totalité ou en partie, réservés pour tous pays. Toute reproduction, par procédé mécanique ou électronique, y compris la microreproduction, est interdite sans l'autorisation écrite d'un représentant dûment autorisé de la SOFAD.

Tout usage en location ou prêt est interdit sans autorisation écrite et licence correspondante octroyée par la SOFAD.

Cet ouvrage est en partie financé par le ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur du Québec.

Dépôt légal – 2018
Bibliothèque et Archives nationales du Québec
Bibliothèque et Archives Canada
ISBN : 978-2-89493-932-1 (imprimé)
ISBN : 978-2-89493-936-9 (PDF)

Mai 2018

Table des matières TOME 1

Présentation du guide d'apprentissage V

Cet aperçu contient :
- la table des matières;
- l'introduction;
- la première situation d'apprentissage.

CHAPITRE 1

Les fonctions définies par parties et la fonction valeur absolue 2
Les systèmes automatisés

SITUATION 1.1

LES FONCTIONS DÉFINIES PAR PARTIES
LA RÉSOLUTION GRAPHIQUE D'ÉQUATIONS OU D'INÉQUATIONS

SP 1.1 – Un système de freinage autonome 4

Exploration 5

Appropriation A 7
- Représenter une fonction définie par parties
- Résoudre une équation ou une inéquation graphiquement

Résolution 12

Appropriation B 14
- Déterminer et interpréter les propriétés d'une fonction définie par parties
- Traduire une situation par une fonction périodique (définie par parties)

Consolidation 22

SITUATION 1.2

LA FONCTION VALEUR ABSOLUE
LA RÉDUCTION D'EXPRESSIONS AVEC VALEUR ABSOLUE

SP 1.2 – Une porte coulissante 28

Exploration 29

Appropriation A 31
- Représenter graphiquement et algébriquement une fonction valeur absolue
- Manipuler des expressions algébriques contenant une valeur absolue

Résolution 38

Appropriation B 40
- Déterminer et interpréter les propriétés d'une fonction valeur absolue
- Déterminer la règle d'une fonction valeur absolue à partir du graphique

Consolidation 46

SAVOIRS EN RÉSUMÉ 51

INTÉGRATION 56

SAÉ 62

CHAPITRE 2

La réciproque d'une fonction et la fonction racine carrée .....
Vivre en société

SITUATION 2.1

LA RÉCIPROQUE D'UNE FONCTION
LA RÉDUCTION D'EXPRESSIONS AVEC LA RACINE CARRÉE

SP 2.1 – Prévenir les inondations 66

Exploration 67

Appropriation A 69
- Rechercher la règle de la réciproque d'une fonction quadratique en contexte
- Représenter la réciproque d'une fonction en contexte

Résolution 74

Appropriation B 76
- Représenter la réciproque en notation fonctionnelle
- Réduire des expressions avec la racine carrée

Consolidation 83

SITUATION 2.2

LA FONCTION RACINE CARRÉE
LA RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS AVEC LA RACINE CARRÉE
LA RÉCIPROQUE D'UNE FONCTION RACINE CARRÉE

SP 2.2 – L'heure de pointe 88

Exploration 89

Appropriation A 91
- Représenter graphiquement une fonction racine carrée
- Déterminer la règle d'une fonction racine carrée à partir de son graphique

Résolution 98

Appropriation B 100
- Déterminer certaines propriétés d'une fonction racine carrée
- Résoudre une équation comportant une racine carrée
- Déterminer la règle de la réciproque d'une fonction racine carrée

Consolidation 106

SAVOIRS EN RÉSUMÉ 111

INTÉGRATION 117

SAÉ 122

© SOFAD – Reproduction interdite.

CHAPITRE 3

Les opérations sur les fonctions et la fonction rationnelle 124
Les capacités d'adaptation de la faune

SITUATION 3.1

LES OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS
LA COMPOSITION DE FONCTIONS

SP 3.1 – Entre coyote et loup 126
Exploration 127
Appropriation A 129
- Déterminer et interpréter la somme, la différence, le produit et le quotient de deux fonctions
- Déterminer et interpréter la composition de deux fonctions

Résolution 138
Appropriation B 140
- Déterminer graphiquement une somme ou une différence de deux fonctions
- Déterminer graphiquement certaines propriétés du produit ou du quotient de deux fonctions

Consolidation 146

SITUATION 3.2

LA FONCTION RATIONNELLE ET SA RÉCIPROQUE
LA RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS OU D'INÉQUATIONS RATIONNELLES

SP 3.2 – La danse en huit des abeilles 152
Exploration 153
Appropriation A 155
- Représenter graphiquement une fonction rationnelle
- Déterminer la règle d'une fonction rationnelle à partir d'une représentation graphique
- Déterminer la règle de la réciproque d'une fonction rationnelle

Résolution 164
Appropriation B 166
- Interpréter la forme générale de la fonction rationnelle
- Résoudre une équation ou une inéquation comportant une expression rationnelle

Consolidation 172

SAVOIRS EN RÉSUMÉ 178
INTÉGRATION 185
SAÉ 192

COMPLÉMENTS

RÉACTIVATION 195
RÉSUMÉ DES SAVOIRS 204
REPÈRES MATHÉMATIQUES 222
GLOSSAIRE 227
CORRIGÉ 240
GRILLE D'ÉVALUATION 325
AIDE-MÉMOIRE 327

© SOFAD – Reproduction interdite.

PRÉSENTATION DU GUIDE D'APPRENTISSAGE

Bienvenue dans le guide d'apprentissage du cours ***Modélisation algébrique et graphique en contexte fondamental 2***. Ce cours, le deuxième de la séquence **Sciences Naturelles** en **5e secondaire**, a pour but de développer votre habileté à traiter des situations qui requièrent une représentation algébrique ou graphique exprimant une relation entre des quantités. À cette fin, vous serez amené à étudier huit nouvelles fonctions réelles, soit les fonctions :

- exponentielle ;
- logarithmique ;
- rationnelle ;
- racine carrée ;
- sinusoïdale ;
- tangente ;
- définie par partie ;
- valeur absolue.

Vous compléterez votre formation en approfondissant vos connaissances sur :

- les opérations sur les fonctions ;
- la recherche du type de dépendance à l'aide de la courbe la mieux ajustée ;
- la résolution d'équations et d'inéquations à une variable.

Vous serez amené à utiliser diverses stratégies de résolution afin de comprendre et de modéliser des situations-problèmes. Votre aptitude à déployer un raisonnement mathématique sera sollicitée. Puis, vous aurez à décrire vos démarches de résolution avec clarté et rigueur à l'aide du langage mathématique.

Vous êtes maintenant convié à réaliser les activités d'apprentissage qui vous sont proposées dans les six chapitres des deux guides de ce cours et à enrichir vos connaissances en algèbre.

Portailsofad.com

Sur portailsofad.com, des capsules vidéo, des activités TIC et des versions imprimables des ressources complémentaires au guide de la collection RÉSOLUTION vous accompagneront tout au long de vos apprentissages.

© SOFAD – Reproduction interdite.

COMPOSANTES D'UN CHAPITRE

La démarche d'apprentissage proposée dans un chapitre permet de progresser en réinvestissant les apprentissages réalisés d'une section à l'autre. Le schéma qui suit illustre cette démarche et précise l'intention pédagogique de chacune des sections.

OUVERTURE DU CHAPITRE

La première page décrit le contexte et la thématique qui serviront de trame de fond à l'acquisition des nouveaux savoirs abordés dans le chapitre.

Une table des matières accompagne cette première page. Les savoirs à acquérir y sont présentés pour chacune des *Situations*, ainsi que le thème des situations-problèmes.

SITUATIONS

De manière générale, il y a deux *Situations* d'apprentissage par chapitre. La démarche proposée dans ces situations permet d'acquérir de nouveaux savoirs et de développer des compétences mathématiques dans des contextes réels, réalistes ou purement mathématiques.

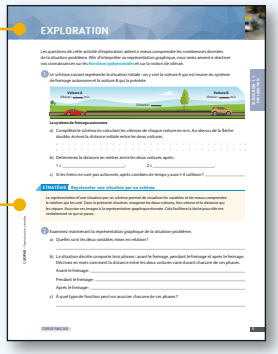
© SOFAD – Reproduction interdite.

PHASES D'UNE SITUATION

SITUATION–PROBLÈME

Liée au thème principal du chapitre, cette page décrit brièvement le contexte de la situation-problème, ainsi que les données nécessaires à sa résolution.

Un encadré décrit la tâche que vous aurez à réaliser plus loin dans la section *Résolution*. Cette tâche est le point de départ vous permettant d'acquérir de nouveaux savoirs en vue de résoudre la situation-problème.



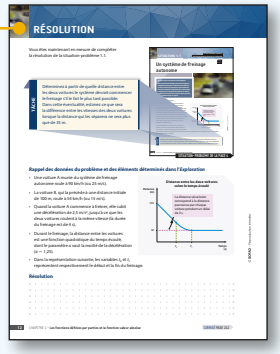
EXPLORATION

Cette section vous invite à analyser les données de la situation-problème, à déterminer les savoirs que vous possédez et ceux que vous devez acquérir pour réaliser la tâche.

Son questionnement vous guidera vers une stratégie de résolution de problème.

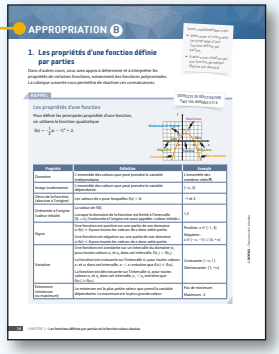
APPROPRIATION A

C'est ici que sont assimilés les savoirs nécessaires pour résoudre la situation-problème. Chaque *Appropriation* stimule la réflexion avant la présentation de nouveaux savoirs mathématiques.



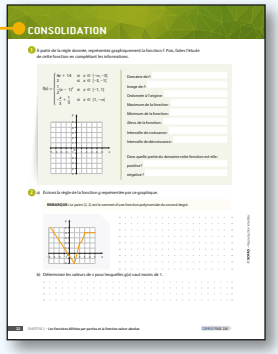
RÉSOLUTION

Arrivé à cette section, vous devriez avoir acquis toutes les connaissances et les stratégies essentielles à la résolution de la situation-problème énoncée au début de la situation.



APPROPRIATION B

Dans cette deuxième appropriation, vous acquerrez de nouveaux savoirs prescrits au programme en lien avec ceux vus dans l'*Appropriation A*.



CONSOLIDATION

Cette section vous permettra de consolider les savoirs mathématiques acquis dans les *Appropriations A* et *B*. Tout comme la section *Intégration*, cette *Consolidation* permet aussi de développer les compétences mathématiques.

EN FIN DE CHAPITRE...

SAVOIRS EN RÉSUMÉ

Cette section résume tous les savoirs *À retenir* sous forme de phrases trouées. On vous invite à ajouter les informations manquantes.

INTÉGRATION

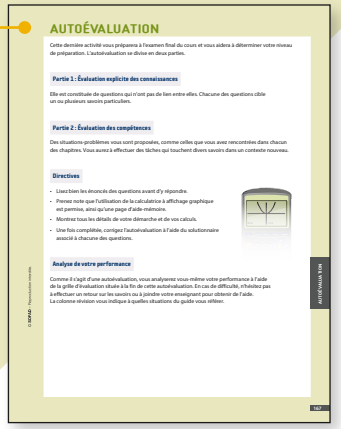
Dans cette section comprenant des exercices et des situations complexes, vous devrez appliquer les savoirs vus dans ce chapitre.

SAÉ

La *SAÉ* est une tâche complexe élaborée selon le modèle des évaluations de sanction. Elle est accompagnée d'une grille d'évaluation des compétences.

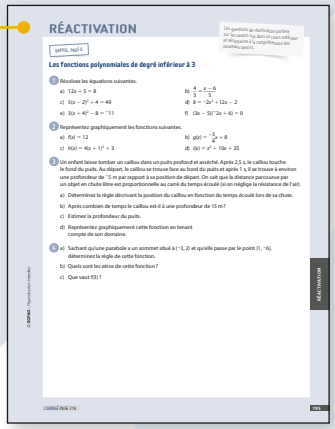
© SOFAD – Reproduction interdite.

COMPLÉMENTS



AUTOÉVALUATION

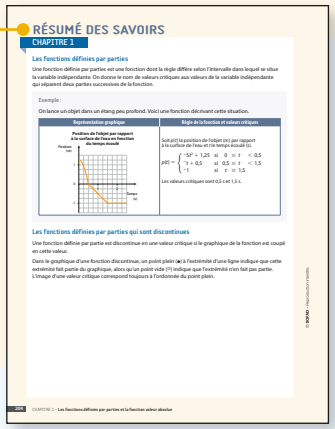
Une *Autoévaluation* est présentée en première partie de ces *Compléments* dans le Tome 2. Elle permet d'évaluer vos connaissances acquises et les compétences mathématiques développées tout au long du cours. Vous pourrez ainsi déterminer les savoirs que vous maîtrisez et ceux pour lesquels une révision s'impose avant de passer à l'*Activité notée synthèse*.



RÉACTIVATION

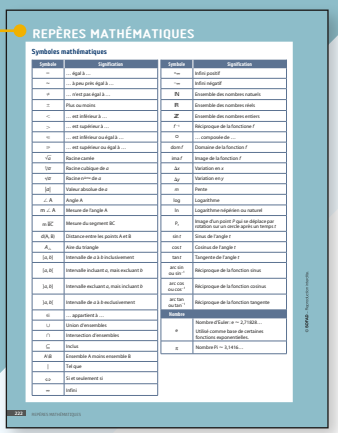
Au cours des *Situations*, vous croiserez des rubriques *Rappel* présentant des savoirs vus dans un cours antérieur et nécessaires à la compréhension du nouveau savoir ou à la résolution de la situation en cours.

Cette *Réactivation* permettra de réviser, à l'aide d'exercices, les règles et les concepts mathématiques qui font l'objet d'un *Rappel*.



RÉSUMÉ DES SAVOIRS

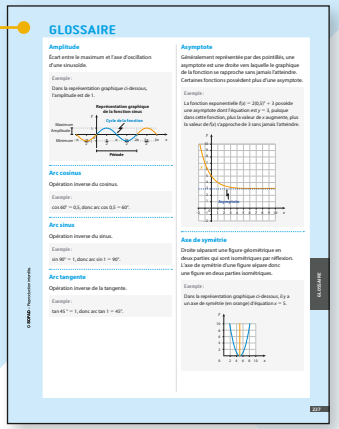
C'est dans cette section que la version complète des *Savoirs en résumé* se situe. Une version imprimable est aussi disponible en ligne.



REPÈRES MATHÉMATIQUES

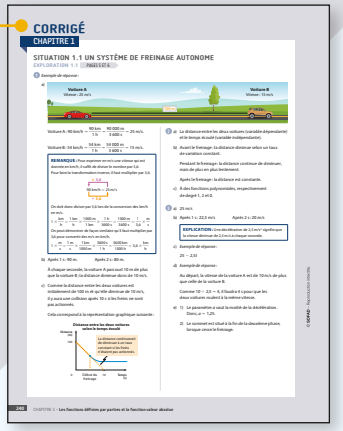
Dans cette section, on présente des symboles mathématiques utilisés dans le guide et certaines abréviations d'unités de mesure. Des formules mathématiques en rappel y sont aussi offertes.

© SOFAD – Reproduction interdite.



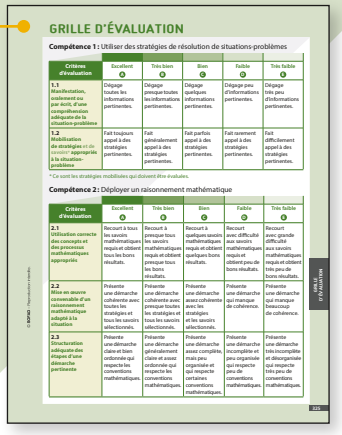
GLOSSAIRE

Les mots et expressions **écrits en bleu** dans le texte courant sont définis dans le *Glossaire*.



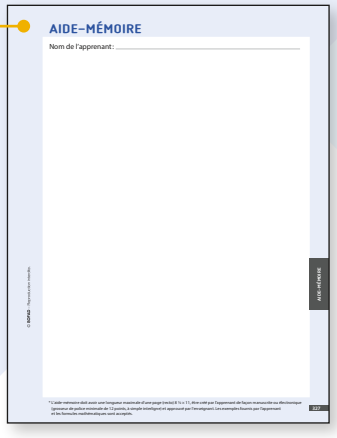
CORRIGÉ

Vers la fin du guide, vous repérerez le *Corrigé*. Il a été conçu non seulement pour valider vos réponses, mais aussi pour vous accompagner dans vos apprentissages. Il contient les réponses aux questions, des explications détaillées sur la démarche ou le raisonnement à mettre en œuvre.



GRILLE D'ÉVALUATION

Une *Grille d'évaluation* des compétences vous est offerte à la fin du guide. À la suite de la résolution d'une *SAÉ*, vous êtes invité à vous évaluer à l'aide de cette grille. Vous pourrez alors compléter la version abrégée située dans le bas de chaque *SAÉ*.



AIDE-MÉMOIRE

Vous pouvez vous constituer un aide-mémoire. Une feuille détachable est prévue à cet effet à la fin du guide dans le Tome 2. Il vous est permis d'utiliser cet aide-mémoire lors de l'épreuve finale.

© SOFAD – Reproduction interdite.

RUBRIQUES ET PICTOGRAMMES

Invite à visionner une capsule vidéo portant sur la situation-problème.

TÂCHE

Déterminez à partir de quelle distance entre les deux voitures…

Présente la tâche à exécuter dans le cadre de votre situation-problème.

RAPPEL

EXERCICES DE RÉACTIVATION
PAGE 138, NUMÉROS 1 À 3

Les fonctions…

Les fonctions dont…

Exemple :

Un objet au départ immobile…

Réfère à des connaissances que vous avez acquises dans des cours antérieurs et à des exercices de réactivation en lien avec ce *Rappel*.

À RETENIR

Les fonctions définies…

Pour calculer l'image d'un…

Exemple :

Pour calculer la valeurde $f(9)$: …

Présente les savoirs mathématiques que vous devez maîtriser. Ce sont les savoirs prescrits par le programme d'étude.

STRATÉGIE Représenter une…

La représentation d'une situation par un schéma permet de visualiser les variables…

Présente des stratégies de résolution de problème qui peuvent s'appliquer dans diverses situations.

© SOFAD – Reproduction interdite.

LE SAVIEZ-VOUS ?

Tous les avions de ligne commerciale fonctionnent en mode de pilotage…

Permet de découvrir des notes historiques et culturelles liées aux concepts mathématiques à l'étude.

ASTUCE

Lorsqu'on approfondie l'étude des fonctions par parties, une convention s'impose : les intervalles qui définissent les parties…

Propose une astuce qui simplifie le travail ou offre une façon différente de traiter le problème ou d'appliquer le concept à l'étude.

ATTENTION !

Il s'agit bien d'une seule fonction, car elle met en relation les mêmes variables dans une même situation, et cela même…

Met en garde sur des pièges à éviter ou des exceptions qui peuvent s'appliquer au concept à l'étude.

TIC

L'activité TIC 2.2.1 permet de valider à l'aide de la calculatrice à affichage graphique la représentation graphique de vos esquisses. Cette activité est accessible…

Incite à effectuer une activité en ligne (GeoGebra ou calculatrice à affichage graphique) qui vous fera explorer la notion travaillée en utilisant des outils technologiques.

ACTIVITÉ NOTÉE

Vous devez maintenant effectuer l'activité notée 1. Elle est accessible sur le site du cours…

Indique que vous êtes prêt à effectuer l'*Activité notée* prévue pour valider votre compréhension en cours d'apprentissage. L'*Activité notée synthèse* se fait, quant à elle, à la toute fin du cours. Ces activités sont présentées dans des fascicules séparés du guide. Vous devrez remettre chaque activité complétée à votre enseignant ou à votre tuteur qui vous fournira une rétroaction à la suite de sa correction.

© SOFAD – Reproduction interdite.

CHAPITRE 1

Les fonctions définies par parties et la fonction valeur absolue

Les systèmes automatisés

Les applications informatiques prennent de plus en plus de place dans nos vies. Alors que certains qualifient ce phénomène d'envahissement, d'autres parlent plutôt d'évolution. Toutefois, on peut sans contredit affirmer que les systèmes automatisés se développent de plus en plus. On peut penser aux édifices publics munis de portes coulissantes automatiques ou encore à l'automatisation de chaînes de production. La place qu'occupent de tels systèmes dans les automobiles d'aujourd'hui en est un autre exemple. Certains prototypes de voitures se déplacent de manière autonome, sans intervention humaine. Évidemment, ces systèmes sont programmés par des spécialistes qui excellent en mathématiques et qui comprennent bien les concepts de la distance, de la vitesse et de l'accélération, ainsi que les modèles fonctionnels qui permettent de les mettre en relation.

© SOFAD – Reproduction interdite.

CHAPITRE 1

SITUATION 1.1

LES FONCTIONS DÉFINIES PAR PARTIES

LA RÉSOLUTION GRAPHIQUE D'ÉQUATIONS OU D'INÉQUATIONS

SP 1.1 – Un système de freinage autonome p. 4

SITUATION 1.2

LA FONCTION VALEUR ABSOLUE

LA RÉDUCTION D'EXPRESSIONS AVEC VALEUR ABSOLUE

SP 1.2 – Une porte coulissante p. 28

SAVOIRS EN RÉSUMÉ p. 51

INTÉGRATION p. 56

SAÉ

Un embobinage automatique p. 62

© SOFAD – Reproduction interdite.

SP 1.1

Un système de freinage autonome

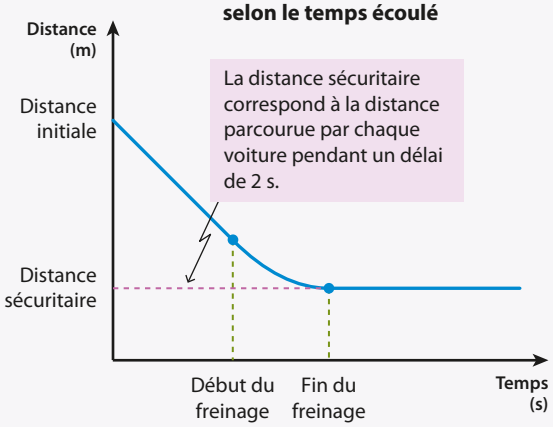
De plus en plus de voitures sont équipées d'un système de freinage autonome d'urgence. L'étape suivante pour l'industrie est d'offrir un système de freinage autonome qui fonctionne en toute occasion. Ce système vise, entre autres, à régulariser la vitesse d'une voiture en tenant compte de la vitesse de la voiture qui la précède et de la distance qui les sépare.

Considérez l'exemple suivant.

Une voiture roule à 90 km/h sur une route de campagne. Ses capteurs détectent une autre voiture à 100 m devant qui roule à 54 km/h. On veut programmer le système pour un freinage en douceur, ce qui provoquerait une décélération de 2,5 m/s^2 jusqu'à ce que les deux voitures roulent à la même vitesse à une distance sécuritaire l'une de l'autre. On sait que, durant le freinage, la distance entre les voitures est une fonction quadratique du temps écoulé, dont le paramètre a vaut la moitié de la décélération.

La représentation ci-contre décrit comment la distance entre les deux voitures devrait évoluer si le système initie le freinage le plus tard possible.

Distance entre les deux voitures selon le temps écoulé



Vous faites partie de l'équipe qui doit mettre au point la programmation du système. On vous demande d'accomplir la tâche suivante.

TÂCHE

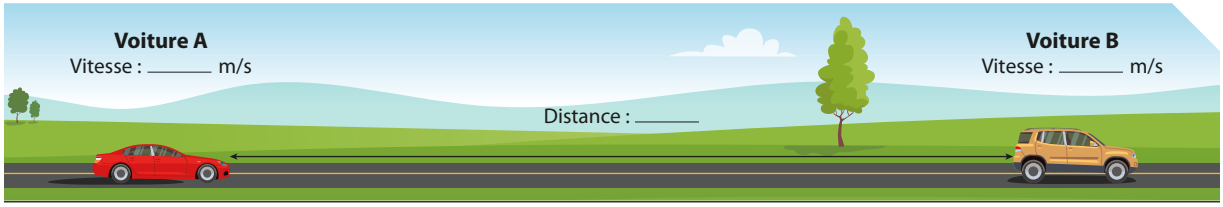
Déterminez à partir de quelle distance entre les deux voitures le système devrait commencer le freinage s'il le fait le plus tard possible. Dans cette éventualité, estimez ce que sera la différence entre les vitesses des deux voitures lorsque la distance qui les séparera ne sera plus que de 35 m.

© SOFAD – Reproduction interdite.

EXPLORATION

Les questions de cette activité d'exploration aident à mieux comprendre les nombreuses données de la situation-problème. Afin d'interpréter sa représentation graphique, vous serez amené à réactiver vos connaissances sur les **fonctions polynomiales** et sur la notion de vitesse.

1 Le schéma suivant représente la situation initiale : on y voit la voiture A qui est munie du système de freinage autonome et la voiture B qui la précède.



Le système de freinage autonome

a) Complétez le schéma en calculant les vitesses de chaque voiture en m/s. Au-dessus de la flèche double, écrivez la distance initiale entre les deux voitures.

b) Déterminez la distance en mètres entre les deux voitures après :

1 s _____ ; 2 s _____ .

c) Si les freins ne sont pas actionnés, après combien de temps y aura-t-il collision ? _____

STRATÉGIE Représenter une situation par un schéma

La représentation d'une situation par un schéma permet de visualiser les variables et de mieux comprendre la relation qui les unit. Dans la présente situation, imaginez les deux voitures, leur vitesse et la distance qui les sépare. Associez ces **images** à la représentation graphique donnée. Cela facilitera la tâche pour décrire verbalement ce qui se passe.

2 Examinez maintenant la représentation graphique de la situation-problème.

a) Quelles sont les deux variables mises en relation ?

b) La situation décrite comporte trois phases : avant le freinage, pendant le freinage et après le freinage. Décrivez en mots comment la distance entre les deux voitures varie durant chacune de ces phases.

Avant le freinage : _____

Pendant le freinage : _____

Après le freinage : _____

c) À quel type de fonction peut-on associer chacune de ces phases ?

© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 240

RAPPEL

EXERCICES DE RÉACTIVATION
PAGE 195, NUMÉROS 1 À 4

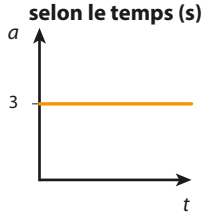
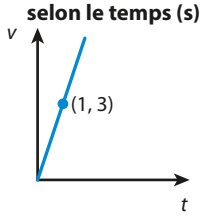
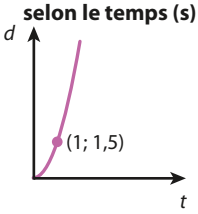
Les fonctions polynomiales de degré inférieur à 3

Les fonctions dont la règle est définie par un polynôme portent le nom de fonctions polynomiales. Il est d'usage de leur donner également les noms suivants : **fonction constante** si le degré du polynôme est 0, **fonction affine** si son degré est 1 ou **fonction quadratique** si son degré est 2.

Exemple :

Un objet au départ immobile subit une accélération de 3 m/s^2.

Les représentations suivantes décrivent l'accélération, la vitesse et la distance parcourue selon le temps écoulé.

Accélération (m/s^2) selon le temps (s)	Vitesse (m/s) selon le temps (s)	Distance (m) selon le temps (s)
		
Fonction constante : $a = 3$	Fonction affine : $v = 3t$	Fonction quadratique : $d = 1{,}5t^2$

3 Les questions suivantes se rapportent surtout à la phase de freinage. Répondez-y en vous référant encore une fois au texte ou au graphique de la situation-problème.

a) Quelle est la vitesse de la voiture A au début de cette phase ? _____

b) Quelle est sa vitesse : après 1 s ? _____ après 2 s ? _____

c) Quelle expression algébrique représente la vitesse de la voiture A durant cette phase ? _____

d) Combien de temps le freinage doit-il durer pour que les deux voitures roulent à la même vitesse ?

. . . . . .

. . . . . .

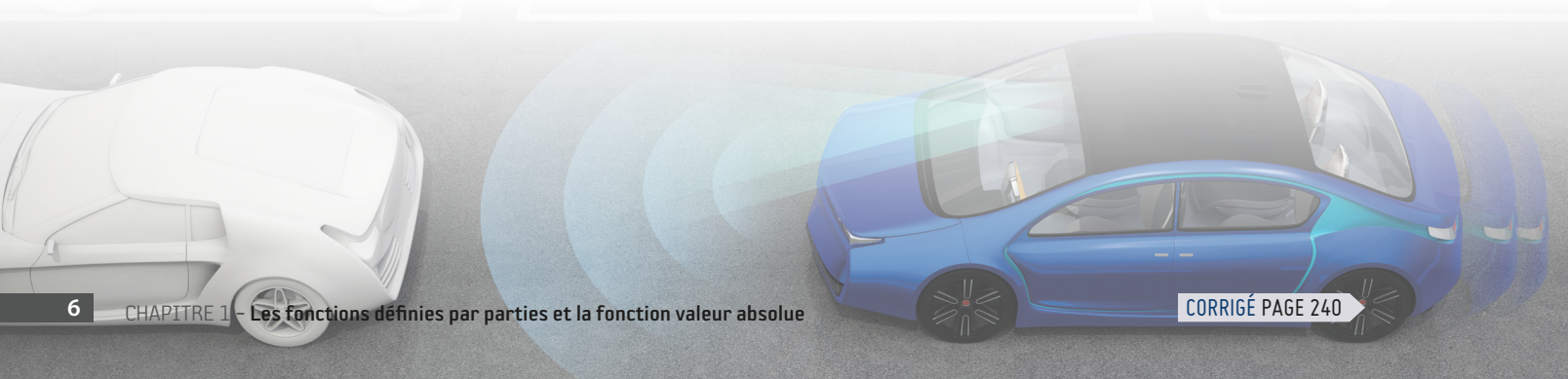
e) La courbe qui décrit la distance entre les deux voitures durant la deuxième phase est une **parabole**.

1) Quelle est la valeur du **paramètre** a dans l'équation canonique de cette parabole ? _____

2) Selon vous, où est situé le sommet de cette parabole ? _____

Pour résoudre la situation-problème, il reste encore des éléments à considérer. Il vous faudra tenir compte du fait que la relation entre le temps et la distance est une fonction particulière, qui est définie différemment dans chacune des phases de la situation. La prochaine activité d'appropriation vous présente cette fonction que l'on nomme **fonction définie par parties**.

© SOFAD – Reproduction interdite.



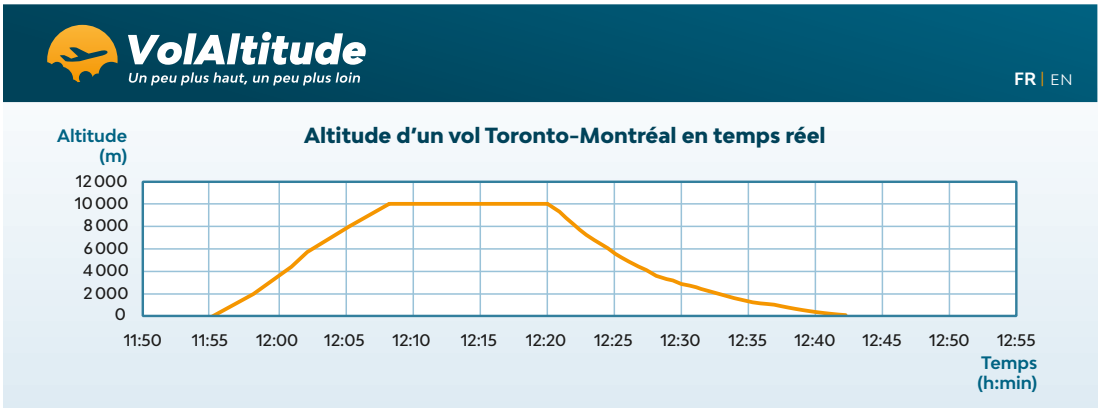
CORRIGÉ PAGE 240

Savoirs mathématiques visés :
- représenter une fonction définie par parties ;
- résoudre une équation ou une inéquation graphiquement.

1. Les fonctions définies par parties

Dans cette section, vous découvrirez comment représenter ce nouveau type de fonction dont la définition varie dans différentes parties de son **domaine**.

1 Un site Internet permet de voir en temps réel la position de n'importe quel avion commercial. Voici comment on y représente l'altitude d'un avion durant un trajet Toronto-Montréal.



«Ce vol a duré seulement 45 min. Du décollage à Toronto jusqu'à ce que l'avion atteigne son altitude de croisière de 10 000 m, soit durant 12,5 min environ, l'ascension s'est faite à un rythme à peu près constant. Puis, l'avion a maintenu son altitude de croisière pendant environ 12,5 min encore avant d'entreprendre sa longue descente vers Montréal. Contrairement à la montée, cette descente s'est faite à un rythme de plus en plus lent de sorte que la variation de l'altitude était à peu près nulle au moment de l'atterrissage.»

LE SAVIEZ-VOUS ?

Tous les avions de ligne fonctionnent en mode de pilotage automatique une bonne partie du trajet, comme lorsque l'avion est en altitude de croisière. Même l'atterrissage est programmé et se fait de façon autonome sous la surveillance des pilotes. Le décollage est la seule portion du vol qui n'est pas encore automatisée. Quand certains passagers applaudissent au moment où l'avion touche terre, ce n'est pas tant le commandant de bord qu'ils félicitent, mais bien l'ordinateur de bord.

a) En tenant compte de la description verbale du vol qui est donnée, représentez graphiquement l'altitude de l'avion en fonction du temps écoulé. N'utilisez que des segments de droite et une portion de parabole.

Altitude de l'avion en fonction du temps écoulé (modélisation)

© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 241

STRATÉGIE Planifier une représentation graphique

Lorsqu'on représente graphiquement une fonction en contexte, il importe de bien planifier notre travail au préalable en se posant quelques questions.

- Parmi les variables mises en relation, laquelle est la **variable indépendante** (ou dépendante) ?
- Quelles sont les unités des variables ?
- Quel est le domaine de la fonction compte tenu du contexte ?
- Quelle est sa valeur minimale ?
- Quelle est sa valeur maximale ?

Les réponses à ces questions sont essentielles pour pouvoir nommer et graduer adéquatement les axes de la représentation graphique.

b) Dans votre représentation en a), inscrivez les coordonnées des extrémités de chaque segment et du sommet de la parabole.

c) Déterminez la règle de la fonction pour un temps de vol :

1) inférieur à 12,5 min _____ ;

2) supérieur ou égal à 12,5 min, mais inférieur à 25 min _____ ;

3) supérieur ou égal à 25 min, mais inférieur à 45 min _____ .

ATTENTION !

Il s'agit bien d'une seule fonction, car elle met en relation les mêmes variables dans une même situation, et cela même si la règle peut s'exprimer de différentes façons dans chacun des **intervalles** donnés.

d) À partir de cette règle, estimez à quelle altitude l'avion se trouvait à chacun des temps de vol suivants.

1) À 10 min : _____

2) À 20 min : _____

3) À 30 min : _____

4) À 40 min : _____

© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 241

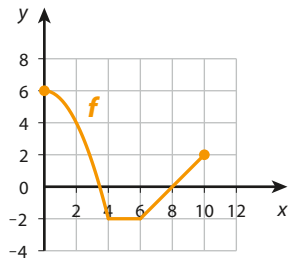
À RETENIR

Les fonctions définies par parties

Une fonction définie par parties est une fonction dont la règle diffère selon l'intervalle dans lequel se situe la variable indépendante.

On donne le nom de **valeurs critiques** aux valeurs de la variable indépendante qui séparent deux parties successives de la fonction. C'est à ces valeurs que la règle de la fonction change.

Exemple :

Représentation graphique d'une fonction définie par parties	Règle de la fonction et valeurs critiques
	$f(x) = \begin{cases} -0{,}5x^2 + 6 & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ -2 & \text{si } 4 \leq x < 6 \\ x - 8 & \text{si } 6 \leq x \leq 10 \end{cases}$ Les valeurs critiques de la fonction sont 4 et 6.

Pour calculer l'image d'un nombre par la fonction, on doit d'abord déterminer dans quelle partie du domaine ce nombre se situe.

Exemple :

Pour calculer la valeur de $f(9)$:

- on constate que 9 se situe dans l'intervalle [6, 10] ;
- alors on utilise la règle $f(x) = x - 8$;
- puis on calcule $f(9) = 9 - 8 = 1$.

ASTUCE

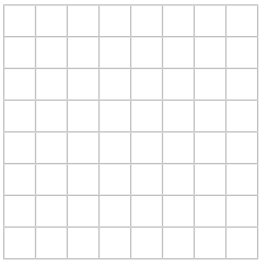
Lorsqu'on approfondit l'étude des fonctions par parties, une convention s'impose : les intervalles qui définissent les parties de la fonction sont **disjoints**. Par exemple, la valeur critique 4 est exclue du premier intervalle, alors qu'elle est incluse dans le second. Cette convention permet que chaque élément du domaine ne soit associé qu'à une seule règle.

EXERCEZ-VOUS

2 Soit la fonction $g(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}(x-2)^2 + 6 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ -\frac{3}{8}(x-2)^2 + 6 & \text{si } 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$

Complétez la table de valeurs, puis représentez graphiquement cette fonction.

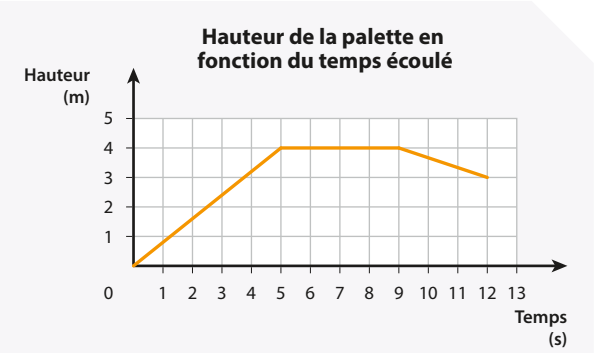
x	$g(x)$
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	



© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 241

3 Dans l'entrepôt d'un magasin, un employé déplace une palette remplie de boîtes du sol vers une étagère à l'aide d'un monte-charge. Il lui faut seulement 12 s pour le faire.



a) Déterminez la règle de cette fonction.

b) Quelle est la hauteur de l'étagère sur laquelle la palette a été déposée ?

ATTENTION !

Assurez-vous que les intervalles qui délimitent les parties de la fonction dans votre règle sont bien disjoints et recouvrent entièrement tous les temps possibles de 0 à 12 s inclusivement.

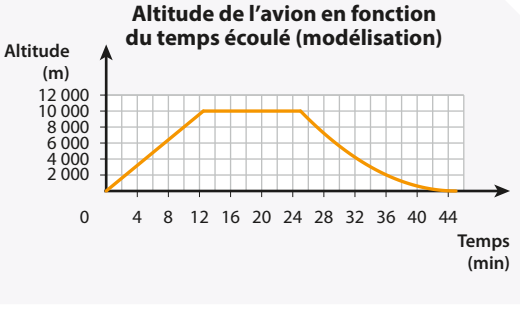
c) À quelle hauteur la palette se trouvait-elle après 3 s ?

2. Résoudre des équations et des inéquations graphiquement

Souvent, il est nécessaire de déterminer quelles valeurs de la variable indépendante ont pour image certaines valeurs données de la **variable dépendante**. Obtenir la réponse graphiquement évite beaucoup de calculs. Si une réponse précise nécessite habituellement une résolution algébrique, la représentation graphique permet d'avoir une bonne approximation de la solution.

4 Reprenez l'exemple du vol d'avion et le graphique tracé à la question 1 a).

À l'aide de ce graphique, estimez pendant combien de temps l'altitude de l'avion a été supérieure à 3000 m. Expliquez votre démarche.



© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 241

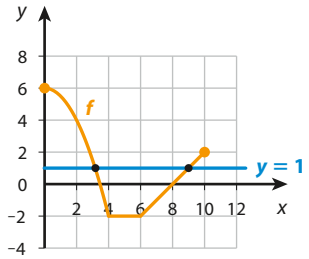
À RETENIR

Les valeurs de la variable indépendante pour une image donnée

Pour les calculer, on détermine d'abord dans quelles parties du domaine ces valeurs se situent. Cela permet de choisir la ou les règles appropriées pour effectuer les calculs.

Exemple :

On reprend la fonction $f(x) = \begin{cases} -0{,}5x^2 + 6 & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ -2 & \text{si } 4 \leq x < 6 \\ x - 8 & \text{si } 6 \leq x \leq 10 \end{cases}$



Voici comment déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 1$:

- on trace la droite $y = 1$ dans la représentation graphique ;
- on observe que la droite coupe le graphique en deux points ;
- on détermine précisément l'abscisse des points à l'aide des règles appropriées.

L'abscisse du premier point est dans l'intervalle [0, 4[.

La règle dans cet intervalle est

$f(x) = -0{,}5x^2 + 6$.

$-0{,}5x^2 + 6 = \mathbf{1}$

$x^2 = 10$

$x = \pm\sqrt{10}$

La racine négative n'est pas dans l'intervalle, donc $x = \sqrt{10}$.

L'abscisse du deuxième point est dans l'intervalle [6, 10].

La règle dans cet intervalle est

$f(x) = x - 8$.

$x - 8 = \mathbf{1}$

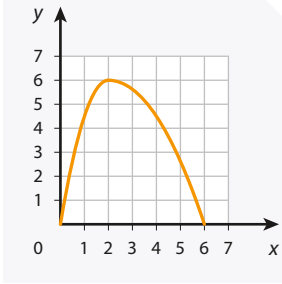
$x = 9$

Les deux valeurs recherchées de x quand $f(x) = 1$ sont $\sqrt{10}$ et 9.

EXERCEZ-VOUS

5 Voici de nouveau la fonction g de la question 2 précédente.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}(x-2)^2 + 6 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ -\frac{3}{8}(x-2)^2 + 6 & \text{si } 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$$



Pour quelles valeurs de x, la fonction $g(x)$ est-elle égale à 4 ?
Faites une estimation graphique, puis déterminez les valeurs précises en arrondissant au centième près. Et selon vous, pour quelles valeurs de x, la fonction $g(x)$ est-elle supérieure à 4 ?

Vous pouvez maintenant représenter graphiquement et algébriquement des fonctions définies par parties. Vous avez aussi appris à déterminer la valeur d'une variable à l'aide de la représentation graphique. Vous êtes maintenant en mesure de résoudre la situation-problème 1.1, *Un système de freinage autonome*.

CORRIGÉ PAGE 242

© SOFAD – Reproduction interdite.

RÉSOLUTION

Vous êtes maintenant en mesure de compléter la résolution de la situation-problème 1.1.

TÂCHE

Déterminez à partir de quelle distance entre les deux voitures le système devrait commencer le freinage s'il le fait le plus tard possible. Dans cette éventualité, estimez ce que sera la différence entre les vitesses des deux voitures lorsque la distance qui les séparera ne sera plus que de 35 m.

SITUATION 1.1

LES FONCTIONS DÉFINIES PAR PARTIES

LA RÉSOLUTION GRAPHIQUE D'ÉQUATIONS OU D'INÉQUATIONS

Un système de freinage autonome

De plus en plus de voitures sont équipées d'un système de freinage autonome d'urgence. L'étape suivante pour l'industrie est d'offrir un système de freinage autonome qui fonctionne en toute occasion. Ce système vise, entre autres, à régulariser la vitesse d'une voiture en tenant compte de la vitesse de la voiture qui la précède et de la distance qui les sépare.

Distance entre les deux voitures selon le temps écoulé

Distance (m)

Distance initiale

La distance sécuritaire correspond à la distance parcourue par chaque voiture pendant un délai de 2 s.

Distance sécuritaire

Début du freinage

Fin du freinage

Temps (s)

© SOFAD – Reproduction interdite.

Vous faites partie de l'équipe qui doit mettre au point la programmation du système. On vous demande d'accomplir la tâche suivante.

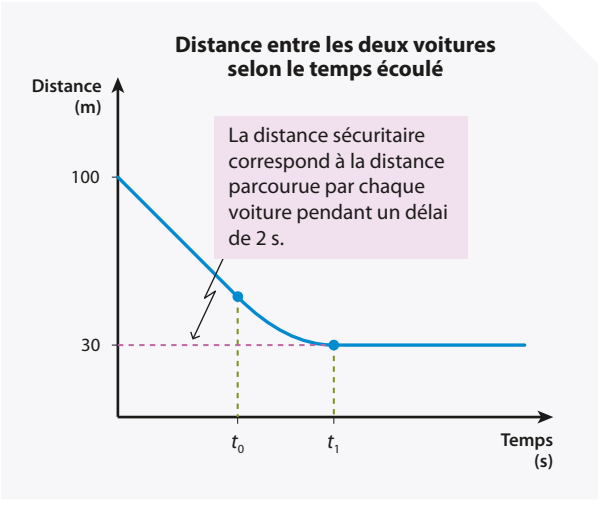
TÂCHE Déterminez à partir de quelle distance entre les deux voitures le système devrait commencer le freinage s'il le fait le plus tard possible. Dans cette éventualité, estimez ce que sera la différence entre les vitesses des deux voitures lorsque la distance qui les séparera ne sera plus que de 35 m.

4 CHAPITRE 1 – Les fonctions définies par parties et la fonction valeur absolue

SITUATION-PROBLÈME DE LA PAGE 4

Rappel des données du problème et des éléments déterminés dans l'*Exploration*

- Une voiture A munie du système de freinage autonome roule à 90 km/h (ou 25 m/s).
- La voiture B, qui la précède à une distance initiale de 100 m, roule à 54 km/h (ou 15 m/s).
- Quand la voiture A commence à freiner, elle subit une décélération de 2,5 m/s^2, jusqu'à ce que les deux voitures roulent à la même vitesse (la durée du freinage est de 4 s).
- Durant le freinage, la distance entre les voitures est une fonction quadratique du temps écoulé, dont le paramètre a vaut la moitié de la décélération ($a = 1{,}25$).
- Dans la représentation suivante, les variables t_0 et t_1 représentent respectivement le début et la fin du freinage.



Résolution

© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 242

Résolution (*suite*)

Réponse : _____

STRATÉGIE Déterminer des pistes de solution

Une situation peut contenir beaucoup d'information et, parfois, on ne sait pas par où commencer. Il importe alors de se poser les bonnes questions.

- Que cherche-t-on ? Dans ce cas-ci, on cherche la distance à laquelle la voiture devra commencer à freiner, c'est-à-dire la distance au temps t_0.
- Que sait-on sur la valeur de t_0 ? Peut-on exprimer la valeur de la distance au temps t_0 à l'aide d'une expression algébrique ?
- Que sait-on sur la règle de la fonction qui permet de déterminer la distance à partir du temps ?
- Dans la deuxième partie de la tâche, comment la vitesse de la voiture A varie-t-elle durant la phase de freinage ?

En exprimant algébriquement les réponses à ces questions, vous pourrez entrevoir certaines pistes de solution.

© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 242

APPROPRIATION B

Savoirs mathématiques visés :
- déterminer et interpréter les propriétés d'une fonction définie par parties ;
- traduire une situation par une fonction périodique (définie par parties).

1. Les propriétés d'une fonction définie par parties

Dans d'autres cours, vous avez appris à déterminer et à interpréter les propriétés de certaines fonctions, notamment des fonctions polynomiales. La rubrique suivante vous permettra de réactiver ces connaissances.

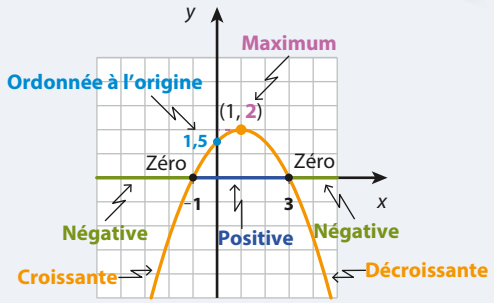
RAPPEL

EXERCICES DE RÉACTIVATION
PAGE 196, NUMÉROS 5 ET 6

Les propriétés d'une fonction

Pour définir les principales propriétés d'une fonction, on utilisera la fonction quadratique

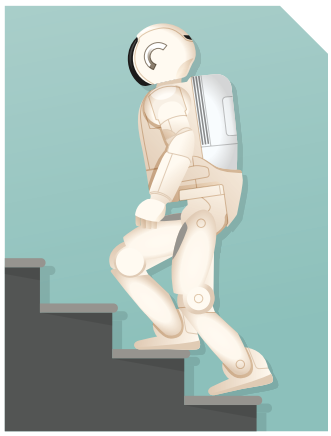
$f(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + 2$.



Propriété	Définition	Exemple
Domaine	L'ensemble des valeurs que peut prendre la variable indépendante.	L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.
Image (codomaine)	L'ensemble des valeurs que peut prendre la variable dépendante.	$[-\infty, 2]$
Zéros de la fonction (abscisse à l'origine)	Les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$.	-1 et 3
Ordonnée à l'origine (valeur initiale)	La valeur de $f(0)$. Lorsque le domaine de la fonction est limité à l'intervalle $[0, +\infty[$, l'ordonnée à l'origine est aussi appelée « valeur initiale ».	1,5
Signe	Une fonction est positive sur une partie de son domaine si $f(x) \geq 0$ pour toutes les valeurs de x dans cette partie. Une fonction est négative sur une partie de son domaine si $f(x) \leq 0$ pour toutes les valeurs de x dans cette partie.	Positive : $x \in [-1, 3]$ Négative : $x \in]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$
Variation	Une fonction est constante sur un intervalle du domaine si, pour toutes valeurs x_1 et x_2 dans cet intervalle, $f(x_1) = f(x_2)$. La fonction est croissante sur l'intervalle si, pour toutes valeurs x_1 et x_2 dans cet intervalle, $x_1 < x_2$ entraîne que $f(x_1) \leq f(x_2)$. La fonction est décroissante sur l'intervalle si, pour toutes valeurs x_1 et x_2 dans cet intervalle, $x_1 < x_2$ entraîne que $f(x_1) \geq f(x_2)$.	Croissante : $]-\infty, 1]$ Décroissante : $[1, +\infty[$
Extremum (minimum ou maximum)	Le minimum est la plus petite valeur que prend la variable dépendante. Le maximum est la plus grande valeur.	Pas de minimum Maximum : 2

© SOFAD – Reproduction interdite.

1 Un robot de forme humaine a été programmé pour monter un escalier. La fonction suivante représente la hauteur relative du pied gauche du robot par rapport à celle du pied droit pendant les quelques secondes où ce pied droit est déposé sur une marche.



$$f(x) = \begin{cases} 8x - 16 & \text{si } 0 \leq x < 4{,}5 \\ -8x + 56 & \text{si } 4{,}5 \leq x < 5 \\ 16 & \text{si } 5 \leq x \leq 6 \end{cases},$$

où $f(x)$ représente la hauteur relative du pied gauche du robot par rapport à celle du pied droit (cm) et x, le temps écoulé (s).

a) Représentez graphiquement cette fonction.

b) Décrivez le domaine et l'image de la fonction en tenant compte du contexte.

c) Quelle est la hauteur relative maximale atteinte par le pied gauche du robot ?

d) À quelle hauteur relative se trouve le pied gauche au début de l'observation ?

e) Cette fonction a-t-elle un zéro ? Si oui, donnez sa valeur et expliquez ce qu'il signifie dans ce contexte.

f) Dans quelle partie du domaine la fonction est-elle négative ? Dans quelle partie est-elle positive ? Qu'est-ce que cela signifie dans ce contexte ?

g) Décrivez comment la hauteur relative du pied gauche varie au cours de cette observation.

© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 244

À RETENIR

Interpréter les propriétés d'une fonction définie par parties

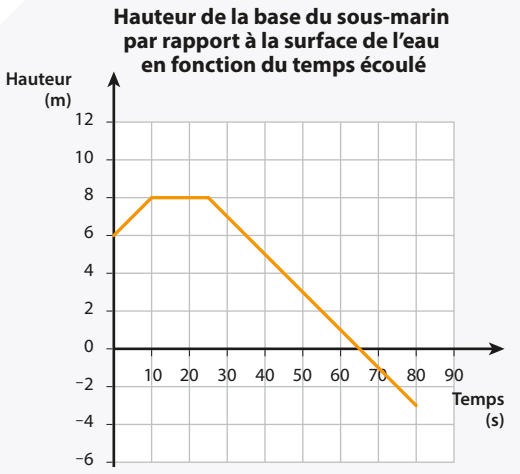
Interpréter les propriétés consiste à expliquer ce que les propriétés signifient en tenant compte du contexte.

Exemple :

Dans la situation précédente du robot qui monte les marches, le domaine de la fonction est [0, 6]. Si on tient compte du contexte, on peut préciser que c'est [0, 6] secondes. On peut interpréter cela en disant que le déplacement de la jambe gauche du robot est observé pendant les 6 premières secondes.

EXERCEZ-VOUS

2 Sur un bateau, un treuil permet de mettre à l'eau un sous-marin d'exploration. La représentation graphique ci-contre décrit la position de la **base** du sous-marin par rapport à la surface de l'eau en fonction du temps écoulé, jusqu'au moment où le sous-marin est détaché.



a) En tenant compte du contexte, décrivez le domaine de la fonction.

b) Au départ, le sous-marin se situe sur le pont du bateau. À quelle hauteur par rapport à l'eau se trouve-t-il ?

c) Quel est le minimum de la fonction ? Interprétez cette valeur en tenant compte du contexte.

d) À quel moment, la base du sous-marin touche-t-elle à la surface de l'eau ?

e) Dans quelle partie du domaine la fonction est-elle positive ? Interprétez votre réponse en tenant compte du contexte.

f) Sur quel intervalle la fonction est-elle décroissante ? Que se passe-t-il avec le sous-marin durant la période de temps décrite par cet intervalle ?

g) Pendant combien de temps le treuil a-t-il vraiment descendu le sous-marin ?

© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 244

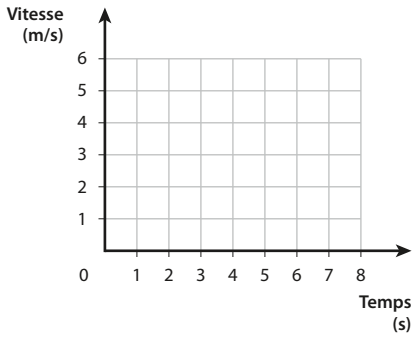
2. Des fonctions discontinues

Jusqu'ici, on a considéré des fonctions définies par parties dont le graphique était formé d'une seule ligne, donc des fonctions dites « continues ». Cependant, il existe des situations modélisées par des fonctions **discontinues**.

3 Un objet, au départ immobile, subit une accélération constante de 3 m/s^2. À 2 s, l'objet cesse d'accélérer et se déplace alors à une vitesse constante.

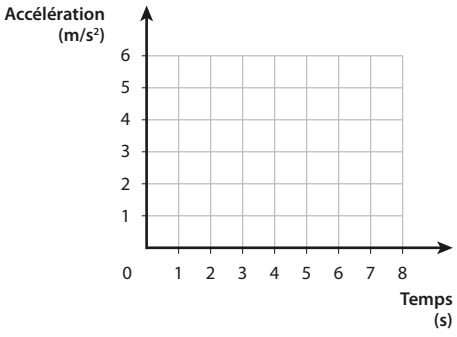
a) Représentez graphiquement les deux fonctions suivantes, puis écrivez leur règle.

1) La vitesse selon le temps écoulé



Règle : _____

2) L'accélération selon le temps écoulé



Règle : _____

b) Quelle est la valeur critique de chacune de ces fonctions ? _____

c) Quelle fonction est discontinue en cette valeur critique ? _____

© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 244

À RETENIR

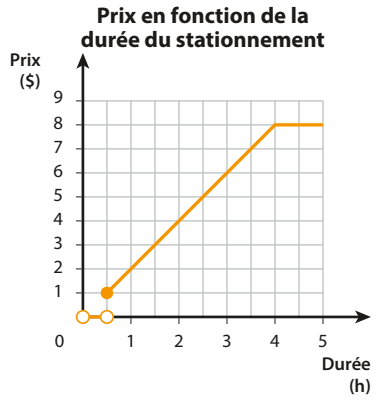
Les fonctions définies par parties qui sont discontinues

Une fonction définie par parties est discontinue en une valeur critique si le graphique de la fonction est coupé en cette valeur (il y a un saut).

Dans le graphique d'une fonction discontinue, un point plein (●) à l'extrémité d'une ligne indique que cette extrémité fait partie du graphique, alors qu'un point vide (○) indique que l'extrémité n'en fait pas partie. L'image d'une valeur critique correspond toujours à l'ordonnée du point plein.

Exemple :

Dans un stationnement, une machine automatique calcule le prix à payer en fonction de la durée du stationnement (h). Un stationnement de moins de 30 min est gratuit.

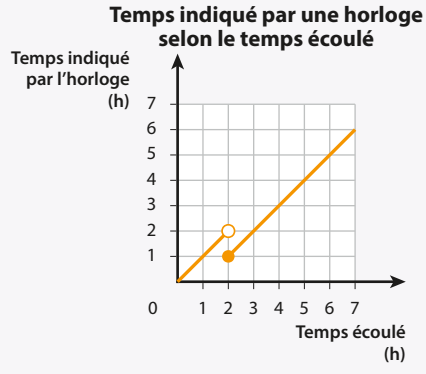
Règle de la fonction	Représentation graphique
$P(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0{,}5 \\ 2x & \text{si} \quad 0{,}5 \leq x < 4 \\ 8 & \text{si} \quad x \geq 4 \end{cases}$, où $P(x)$ est le prix pour un stationnement (\$) et x est la durée du stationnement (h). (On suppose que la machine arrondit le prix à payer après le calcul, s'il y a lieu.)	

Les deux valeurs critiques sont 0,5 h et 4 h.

À 0,5 h, la fonction est discontinue. À 4 h, la fonction est continue.

EXERCEZ-VOUS

4 Sur un ordinateur, on peut regarder l'heure à l'aide d'une horloge qui simule le déplacement des aiguilles. Le graphique suivant montre ce qu'on pourrait observer durant les premières heures d'un certain dimanche de novembre.



a) Quel événement ce graphique représente-t-il ?

b) Écrivez la règle de cette fonction.

c) Quel est le temps indiqué par l'horloge 2 h après minuit ?

d) Combien de temps s'est-il écoulé depuis minuit si l'horloge indique qu'il est 1 h 30 ?

© SOFAD – Reproduction interdite.

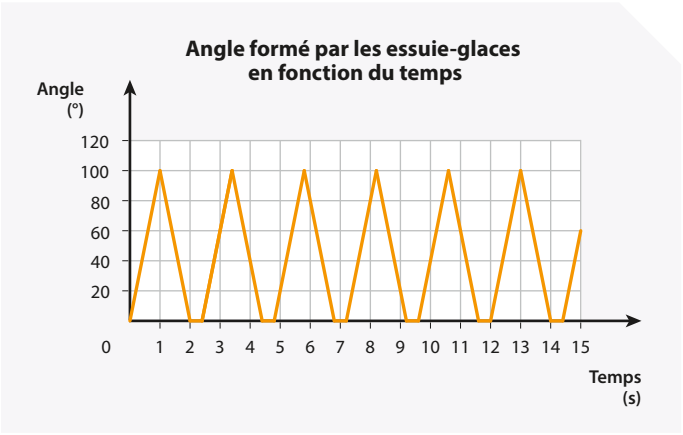
CORRIGÉ PAGE 244

3. Des fonctions définies par parties qui sont périodiques

Dans certaines situations, il arrive qu'un même phénomène se répète avec régularité. Ce type de situation est modélisé par une **fonction périodique**, qui, dans certains cas, peut être aussi une fonction définie par parties. L'exemple suivant vous permettra de découvrir les caractéristiques de ce type de fonction.

5 Assis dans une voiture, alors qu'une pluie fine tombe à l'extérieur, on observe l'angle que forment les essuie-glaces intermittents avec la base du pare-brise. Cet angle varie de 0 à 100°. Chaque balayage à l'aller comme au retour semble durer 1 s. Un battement est suivi d'une pause d'une fraction de seconde en position fermée. Entre le début du premier battement et le début du sixième, il s'écoule exactement 12 s.

Voici une représentation graphique de la situation.



ATTENTION !

Assurez-vous que la répétition du motif que vous surlignez permet de reproduire entièrement le graphique de la fonction par translation horizontale, sans superposition et sans laisser d'espace vide.

a) Le graphique est constitué d'un motif qui se répète par translation. Mettez en évidence ce motif en le surlignant.

b) Déterminez la longueur de l'intervalle dans lequel s'inscrit le motif que vous avez surligné en a). Que signifie cette longueur dans le contexte ?

c) À ce rythme, combien de battements les essuie-glaces feront-ils en une minute ?

d) On peut aussi représenter la situation algébriquement.

Soit $f(t)$ l'angle en degrés que forment les essuie-glaces après t secondes. Écrivez la règle de cette fonction en vous limitant à la partie du domaine qui contient le motif surligné.

e) En vous servant de cette règle et de votre réponse en b), déterminez l'angle formé par les essuie-glaces après 80 s.

© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 245

À RETENIR

Les fonctions périodiques

Une fonction, dont le graphique est constitué d'un motif qui se répète par translation horizontale sur la totalité de son domaine, porte le nom de « fonction périodique ». Le motif qui se répète est un **cycle** de la fonction.

La **période** de la fonction est la longueur du plus petit intervalle qui contient un cycle complet.

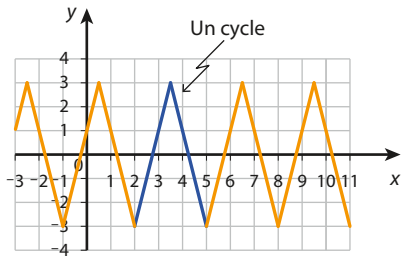
Lorsqu'une fonction est périodique, certains éléments du domaine ont la même image :

$f(x) = f(x \pm p) = f(x \pm 2p) = f(x \pm 3p) = \ldots$

ATTENTION !

Dans la réalité, il existe plusieurs phénomènes qui sont cycliques, sans être tout à fait périodiques. Par exemple, la marée est un phénomène cyclique qui se répète deux fois par jour, mais elle n'est jamais exactement la même. **Pour être périodique, le cycle doit se répéter tel quel sans aucun changement.**

Exemple :

Représentation graphique et cycle d'une fonction périodique	Période de la fonction	Règle de la fonction pour le cycle choisi
	Un **cycle** est inscrit sur l'axe des x dans l'intervalle $[2, 5[$. La **période** de la fonction est donc égale à **3**, soit $5 - 2$.	Sur l'intervalle $[2, 5[$: $f(x) = \begin{cases} 4x - 11 & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 3{,}5 \\ -4x + 17 & \text{si} \quad 3{,}5 \leq x < 5 \end{cases}$

Voici comment calculer l'image d'une valeur de x hors du cycle choisi, par exemple $f(\mathbf{21})$.

- Soustraire (ou additionner) la période autant de fois qu'il faut pour que le résultat soit dans le domaine du cycle choisi :

  $x \pm np \Rightarrow$ à une valeur du domaine du cycle choisi

  $\mathbf{21} - 5 \times \mathbf{3} = 4$.

  Le nombre 4 fait partie de l'intervalle $[2, 5[$.

- La valeur recherchée est la même que l'image par la fonction du nombre déterminé :

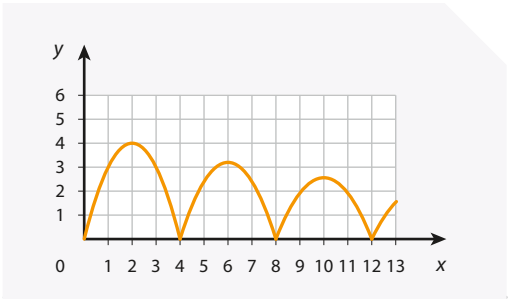
  $f(\mathbf{21}) = f(4) = -4(4) + 17 = 1$.

© SOFAD – Reproduction interdite.

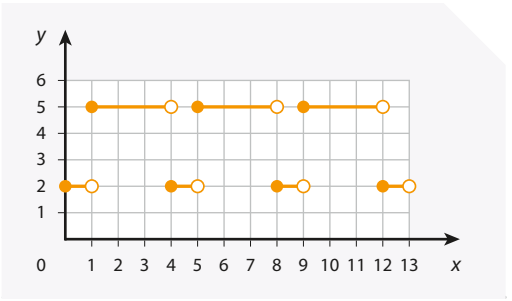
EXERCEZ-VOUS

6 Parmi les graphiques suivants, lesquels représentent une fonction périodique ? Pour ces fonctions choisies, surlignez un de leur cycle.

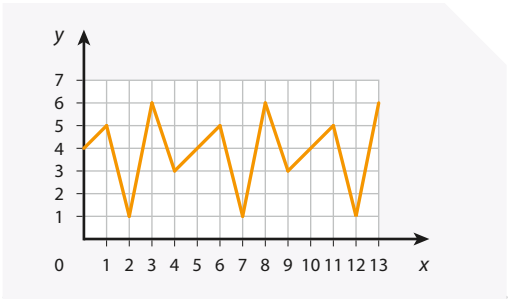
(A)



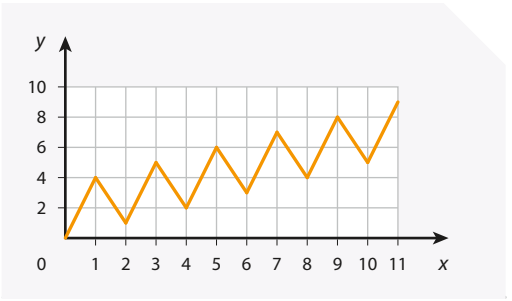
(B)



(C)



(D)



7 Pour chacune des fonctions périodiques du numéro précédent, déterminez les éléments suivants.

a) La période de la fonction :

b) La règle de la fonction si on la restreint au cycle que vous avez mis en évidence :

c) L'image de la fonction pour $x = 38$:

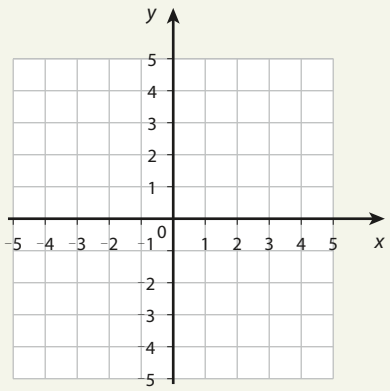
© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 245

CONSOLIDATION

1 À partir de la règle donnée, représentez graphiquement la fonction *f*. Puis, faites l'étude de cette fonction en complétant les informations.

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 14 & \text{si } x \in [-\infty, -3[\\ 2 & \text{si } x \in [-3, -1[\\ \frac{1}{2}(x-1)^2 & \text{si } x \in [-1, 1[\\ -\frac{x}{3} + \frac{1}{3} & \text{si } x \in [1, -\infty[\end{cases}$$



Domaine de *f* :

Image de *f* :

Ordonnée à l'origine :

Maximum de la fonction :

Minimum de la fonction :

Zéros de la fonction :

Intervalle de croissance :

Intervalle de décroissance :

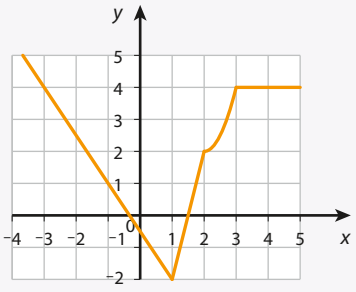
Dans quelle partie du domaine cette fonction est-elle :

positive ?

négative ?

2 a) Écrivez la règle de la fonction *g* représentée par ce graphique.

REMARQUE : Le point (2, 2) est le sommet d'une fonction polynomiale du second degré.



b) Déterminez les valeurs de *x* pour lesquelles $g(x)$ vaut moins de 1.

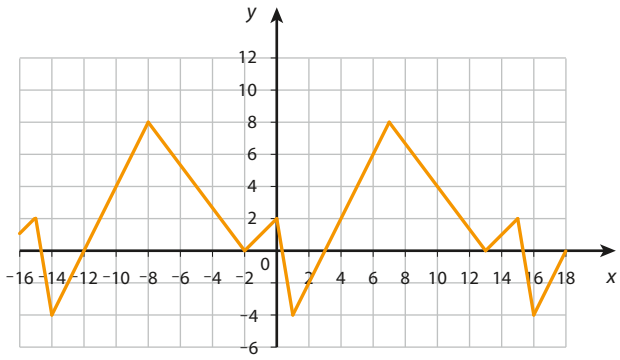
© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 246

3 Déterminez les valeurs critiques de la fonction f et dites si la fonction est continue ou discontinue à chacune de ces valeurs critiques. Justifiez votre réponse.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & \text{si } x \in]-\infty, -1[\\ 3 & \text{si } x \in [-1, 1[\\ -2x + 5 & \text{si } x \in [1, 4[\\ -\frac{1}{3}x - \frac{8}{3} & \text{si } x \in [4, +\infty[\end{cases}$$

4 Voici le graphique d'une fonction périodique.



a) Surlignez un cycle présent dans le graphique de cette fonction.

b) Déterminez la période de cette fonction. _____

c) Quelle est l'image de 118 par cette fonction ?

5 À partir de la règle suivante, déterminez les images demandées.

$$h(x) = \begin{cases} -2x - 5 & \text{si } x \in]-\infty, -2[\\ 3x + 5 & \text{si } x \in [-2, 0[\\ 5 & \text{si } x \in [0, 3[\\ -x + 4 & \text{si } x \in [3, +\infty[\end{cases}$$

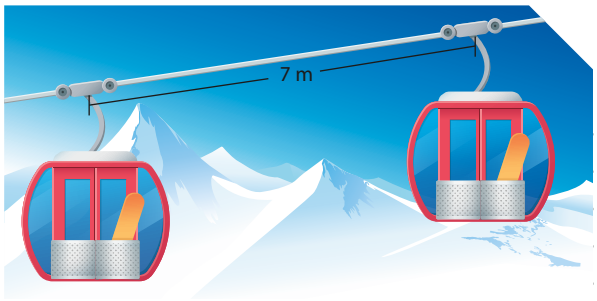
a) $h(-1, 4) =$ _____ b) $h(1) =$ _____ c) $h(3) =$ _____

© SOFAD – Reproduction interdite.

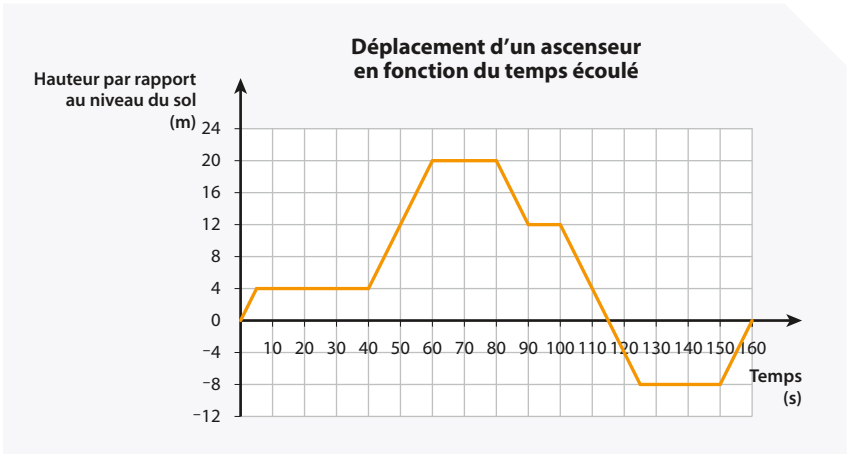
CORRIGÉ PAGE 246

6 Dans un centre de ski, une remontée mécanique compte 150 cabines entre le haut et le bas de la piste et le même nombre dans la montée. La distance entre les cabines est de 7 m. La vitesse de la remontée est de 210 m/min. Au début des observations, la cabine numéro 2 est tout en haut.

Quelle sera la position de cette cabine après 18 min 20 s, sachant que le système de remontée continue de se déplacer au même rythme ?



7 La représentation graphique suivante illustre le déplacement d'un ascenseur en fonction du temps en secondes. Sachant que chaque étage mesure 4 m de hauteur, répondez aux questions suivantes.



a) Déterminez le maximum et le minimum. À quoi correspondent-ils ?

b) Pour quels intervalles l'ascenseur est-il arrêté au niveau du plancher d'un étage ?

c) Pour quels intervalles l'ascenseur monte-t-il ?

d) Quelle est l'image de la fonction ? À quoi correspond-elle ?

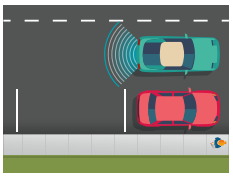
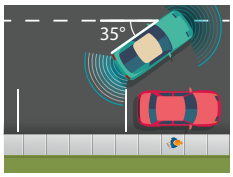
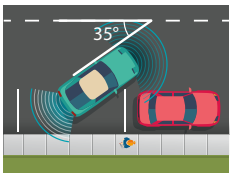
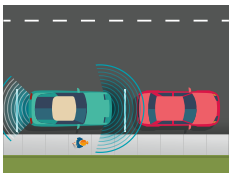
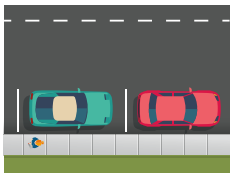
e) Pour quel intervalle le plancher de l'ascenseur est-il sous le niveau du sol ?

f) À quels étages l'ascenseur s'est-il arrêté sur la période de temps étudiée ?

© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 247

8 Les images suivantes montrent comment le système autonome de stationnement d'une voiture réalise un stationnement en parallèle.

				
0 s	1,4 s	3,6 s	5 s	8 s

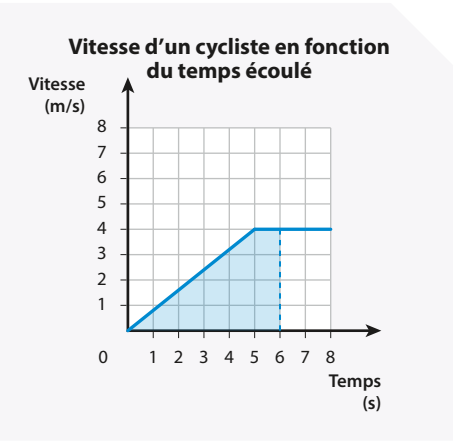
a) Représentez graphiquement l'angle en degrés que forme la voiture avec la direction de la rue en fonction du temps écoulé en secondes. Puis, écrivez la règle de cette fonction.

b) Décrivez en mots les manœuvres du stationnement en précisant si la voiture avance, arrête ou recule, et comment l'angle qu'elle forme avec la direction de la rue varie.

© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 248

9 La représentation graphique ci-contre décrit la vitesse d'un cycliste qui accélère pendant 5 s, puis qui roule à une vitesse constante. Pour calculer la distance en mètres que cette personne aura parcourue après un certain temps *t*, il suffit de calculer l'aire de la région sous la courbe dans l'intervalle entre 0 et cette valeur de *t*. Par exemple, l'aire de la région colorée dans la représentation graphique correspond à la distance parcourue par le cycliste durant les 6 premières secondes. Cette distance est de 14 m.



a) Complétez la table de valeurs suivante.

Distance parcourue par le cycliste en fonction du temps écoulé

Temps (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Distance (m)	0						14		

b) Représentez graphiquement la distance en fonction du temps, puis déterminez la règle de cette fonction.

c) Combien de temps a-t-il fallu au cycliste pour franchir :

1) les 8 premiers mètres ?

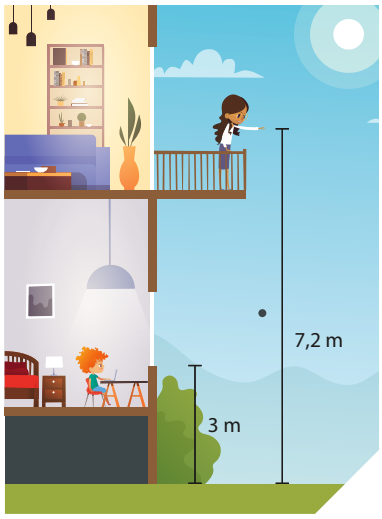
2) les 8 mètres suivants ?

© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 248

10 D'un balcon, on laisse tomber une balle d'une hauteur de 7,2 m. De la fenêtre de sa chambre, un enfant dont les yeux sont situés à une hauteur de 3 m aperçoit la balle tomber et rebondir.

Cette balle atteint à chaque bond une hauteur équivalente au deux tiers de la hauteur maximale atteinte au bond précédent. Puisque la hauteur d'un corps en chute libre est une fonction quadratique du temps écoulé, le paramètre *a* vaut ici la moitié de son accélération.



REMARQUE : Sur Terre, l'accélération gravitationnelle est d'environ $-9{,}8\ \text{m/s}^2$ et le paramètre *a* correspond à la moitié de cette accélération, soit $-4{,}9$; on peut arrondir à -5 pour cette résolution.

a) Quelle règle représente la relation entre la hauteur de la balle (m) et le temps écoulé (s) depuis le début de la chute de la balle jusqu'à la troisième fois où la balle touche le sol ? Arrondissez vos mesures au dixième près.

b) À quel moment depuis le début de la chute de la balle l'enfant verra-t-il la balle pour la dernière fois ? Arrondissez votre réponse au dixième près.

© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 249

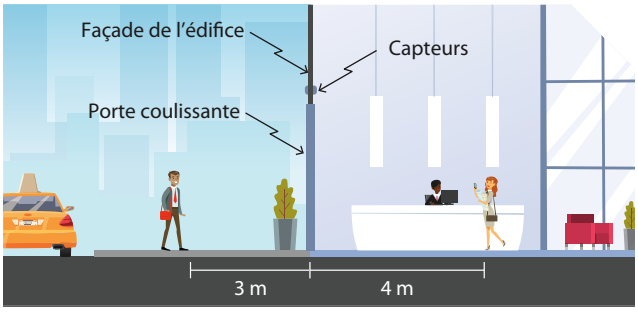
Une porte coulissante

SP 1.2

Lorsqu'une porte coulissante automatique est installée, on s'attend à ce que les gens puissent entrer et sortir sans ralentir le pas ni arrêter de marcher. La porte coulissante doit s'ouvrir à temps pour laisser le passage, mais elle ne doit pas rester ouverte inutilement lorsqu'il n'y a personne.

Pour programmer l'ouverture d'une porte coulissante de façon optimale, une équipe de recherche a décidé de faire des simulations aléatoires pour mieux comprendre ce qui se passe. Voici un exemple de simulation.

Un homme s'apprête à entrer dans un édifice pendant qu'une femme veut en sortir. Des capteurs situés au-dessus de la porte détectent la position de chaque personne. Au départ, l'homme se trouve à 3 m de la porte et la femme à 4 m. Une demi-seconde plus tard, l'homme se trouve à 2,4 m et la femme à 3,6 m. On suppose que chaque personne va continuer de marcher à une vitesse constante.



Porte coulissante

Trois contraintes ont été fixées pour gérer l'ouverture et la fermeture de la porte coulissante :

- la porte s'ouvre lorsqu'on s'en approche à 1,5 m ou moins ;
- la porte commence à se refermer seulement lorsqu'il n'y a plus personne dans cette zone ;
- une fermeture ou une ouverture complète des portes prend 1 s.

L'équipe de recherche s'intéresse à la question suivante : Pendant combien de temps la porte sera-t-elle partiellement ou totalement ouverte ?

TÂCHE

Modélisez la situation à l'aide de deux fonctions en exprimant la distance entre chacune des personnes et la porte selon le temps écoulé. Décrivez verbalement ce qui se passe durant le passage des deux personnes, en précisant à quels moments les divers mouvements de la porte auront lieu. Puis, répondez à la question de l'équipe de recherche.

© SOFAD – Reproduction interdite.

EXPLORATION

Les questions de cette activité d'exploration permettent de bien cerner la situation-problème en vous aidant à interpréter son schéma et ses contraintes. Elles offrent aussi l'occasion de revoir le concept de distance et de **valeur absolue**.

1 La première partie de la tâche consiste à modéliser la situation à l'aide de deux fonctions dont la variable indépendante est le temps écoulé en secondes.

a) Quelle est la variable dépendante de chacune de ces fonctions ?

1re fonction : _____ 2e fonction : _____

b) Quelle est la **valeur initiale** de chacune de ces fonctions ?

1re fonction : _____ 2e fonction : _____

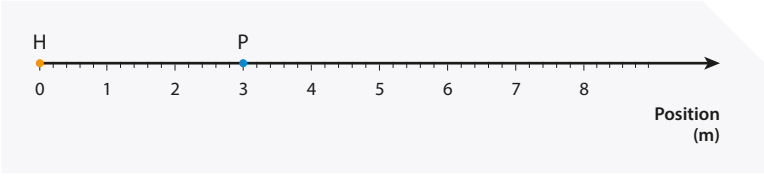
c) Entre 0 et 0,5 s, quel est le **taux de variation** de chacune de ces fonctions ? Précisez ce que signifient ces taux dans le contexte.

1re fonction : _____ 2e fonction : _____

ATTENTION !

Pour définir une variable dans une situation avec contexte, il est important d'en préciser l'unité de mesure.

2 Pour mieux comprendre la situation, on peut utiliser une droite numérique. Dans la représentation suivante, le point H représente la position de l'homme au départ et le point P, celle de la porte coulissante.



Analysez quelques cas possibles en remplissant le tableau suivant. Pour chacune des valeurs de temps que vous choisissez, situez la position correspondante de l'homme sur la droite numérique.

Position de l'homme et distance entre l'homme et la porte en fonction du temps

Temps écoulé (s)	Position de l'homme par rapport à son point de départ (m)	Distance entre l'homme et la porte (m)	L'homme se trouve-t-il dans la zone d'ouverture de la porte ?

© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 249

STRATÉGIE Se donner des exemples numériques

Lorsqu'on cherche une règle algébrique, se donner des exemples numériques aide à mieux comprendre la situation. Les valeurs choisies doivent être diversifiées pour tenir compte de tous les cas possibles. Ici, les valeurs choisies dans le tableau doivent permettre de voir que la distance diffère selon que l'homme se situe avant ou après la porte.

3 À l'aide du tableau précédent, répondez aux questions suivantes.

a) Quelle expression algébrique représente la position de l'homme en mètres par rapport à son point de départ après t secondes ?

b) Écrivez la règle de la fonction représentant la distance en mètres entre l'homme et la porte après t s. Validez votre réponse avec différentes valeurs de t.

ATTENTION !

Une distance est toujours représentée par un nombre positif. La règle que vous avez déterminée en b) donne-t-elle un nombre positif pour n'importe quelle valeur de t ?

RAPPEL

EXERCICES DE RÉACTIVATION
PAGE 198, NUMÉROS 7 ET 8

La valeur absolue et le concept de distance

La valeur absolue d'un nombre, notée $|x|$, est la valeur que l'on obtient lorsqu'on fait abstraction du signe de ce nombre. Si le nombre est positif, on ne fait rien ; si le nombre est négatif, on change son signe.

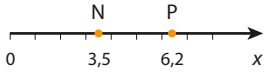
Exemple 1 :

$|3| = 3$ et $|-3| = 3$

La distance entre deux points sur une droite numérique peut s'exprimer à l'aide d'une valeur absolue en utilisant la formule suivante : $d(A, B) = |x_B - x_A|$.

Exemple 2 :

La distance de P à N, notée d(P, N), est égale à 2,7, car $|3{,}5 - 6{,}2| = |-2{,}7| = 2{,}7$.



Vous venez de décrire la distance entre l'homme et la porte en fonction du temps écoulé, et ce, à l'aide d'une seule expression algébrique comportant une valeur absolue. Pour poursuivre la résolution, il faudra définir l'expression algébrique qui décrit la distance entre la femme et la porte. Pour faciliter son interprétation, la prochaine activité d'appropriation présente cette nouvelle fonction nommée **fonction valeur absolue**.

© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 250

Savoirs mathématiques visés :

- représenter graphiquement et algébriquement une fonction valeur absolue ;
- manipuler des expressions algébriques contenant une valeur absolue.

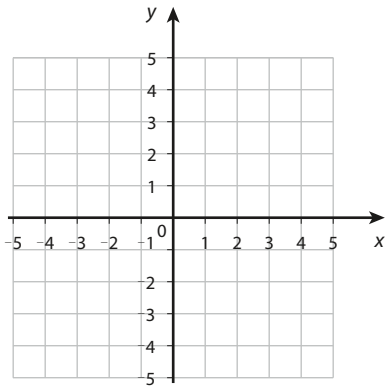
1. Découvrir la fonction valeur absolue

Dans cette section, vous apprendrez à représenter graphiquement une fonction valeur absolue lorsque sa règle est écrite sous la **forme canonique** $f(x) = a|x - h| + k$. Vous serez amené à découvrir comment les caractéristiques du graphique de cette fonction sont déterminées par les paramètres a, h et k.

1 Considérez d'abord la fonction valeur absolue la plus simple, celle dont la règle est $f(x) = |x|$.

a) Complétez la table de valeurs ci-dessous, situez les points dans le plan cartésien, puis tracez le graphique de cette fonction.

x	$f(x) = \|x\|$
−3	
−2	
−1	
0	
1	
2	
3	



b) Décrivez au moins trois caractéristiques du graphique de cette fonction.

ASTUCE

Comparer ce graphique à la parabole d'équation $y = x^2$. Qu'ont-ils de semblable ? Qu'ont-ils de différent ? Ces questions aident à déterminer ses caractéristiques.

c) Examinez maintenant ce qui se passe si on modifie cette fonction par l'ajout des paramètres a, h et k.

Complétez la table de valeurs pour chacune des fonctions f_1, f_2 et f_3. Puis, tracez leur graphique dans le même plan cartésien qu'en a). (Utilisez différentes couleurs.)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f_1(x) = \frac{1}{2}\|x\|$							
$f_2(x) = \frac{1}{2}\|x\| - 2$							
$f_3(x) = \frac{1}{2}\|x - 1\| - 2$							

ATTENTION !

Pour évaluer la valeur absolue d'une expression, on doit d'abord déterminer la valeur numérique de cette expression, puis prendre la valeur absolue du résultat.

Exemple :
Si $x = -3$, alors
$|x - 1| = |(-3) - 1| = |-4| = 4$.

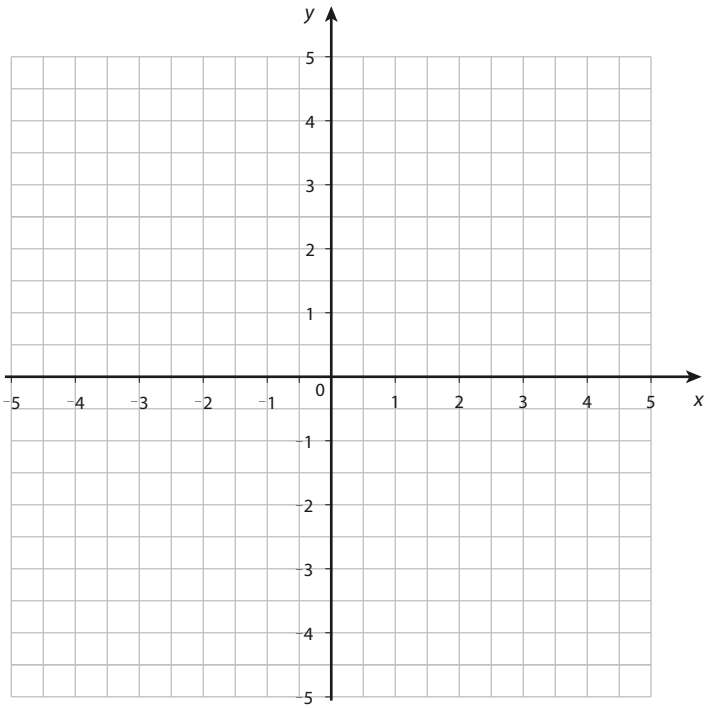
CORRIGÉ PAGE 250

© SOFAD – Reproduction interdite.

d) En observant les quatre graphiques que vous avez tracés, énoncez une conjecture sur le rôle de chaque paramètre : a, h et k.

2 a) Qu'arriverait-il au graphique de la fonction si le paramètre a était négatif ?

b) Validez votre réponse en traçant le graphique de la fonction $f_4(x) = -\frac{1}{2}|x - 1| - 2$ dans le plan cartésien ci-dessous.



© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 250

À RETENIR

La fonction valeur absolue

La valeur absolue d'un nombre x est définie algébriquement de la façon suivante :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

ATTENTION !

L'expression algébrique $-x$ ne représente pas un nombre négatif. Cette expression signifie plutôt « l'opposé de x ». Quand x est négatif, l'opposé de x est positif. La valeur absolue d'un nombre est toujours positive.

Une fonction valeur absolue est une fonction dont la règle peut s'écrire sous la forme canonique

$$f(x) = a|x - h| + k \quad ,$$

où les paramètres a, h et k sont des nombres réels.

Le graphique de cette fonction a la forme d'un V (si a est positif) ou d'un V inversé (si a est négatif). Plus précisément, le graphique a les caractéristiques suivantes :

- il possède un axe de symétrie vertical dont l'équation est $x = h$;
- il est formé de deux demi-droites de même origine dont les pentes valent respectivement $-a$ (à gauche de l'axe de symétrie) et a (à droite de l'axe de symétrie) ;
- l'origine des demi-droites, appelée « sommet », est située sur l'axe de symétrie, aux coordonnées (h, k).

Exemple :

Soit la fonction $f(x) = -2|x + 1| + 3$.

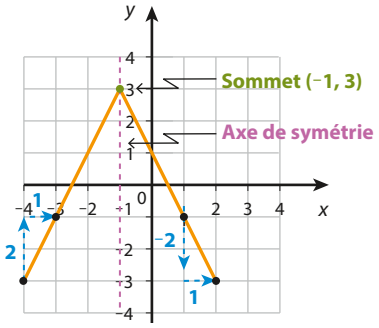
Valeur des paramètres : $\mathbf{a = -2}$; $\mathbf{h = -1}$; $\mathbf{k = 3}$

Le paramètre a étant négatif, le V est inversé.

Axe de symétrie : $\mathbf{x = -1}$

Pente des demi-droites : **2** et **−2**

Coordonnées du sommet : **(−1, 3)**



REMARQUE : Pour faciliter l'écriture, on utilisera toujours le paramètre a dans la règle, même si on parle de pente de demi-droites.

TIC L'activité TIC 1.2.1 qui est accessible sur portailsofad.com offre l'occasion de représenter graphiquement la fonction valeur absolue à l'aide de la calculatrice à affichage graphique. Vous serez ainsi en mesure de valider vos propres représentations graphiques.

© SOFAD – Reproduction interdite.

EXERCEZ-VOUS

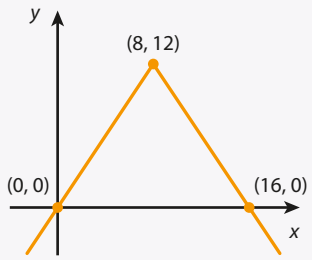
3 Représentez graphiquement les fonctions suivantes.

a) $f(x) = 3|x - 1| - 2$

b) $g(x) = -|x - 2| + 3$

4 Pour chacune des fonctions représentées, déterminez le signe du paramètre a et la pente des deux demi-droites. En tenant compte des coordonnées du sommet, écrivez ensuite la règle de la fonction.

a) La fonction f

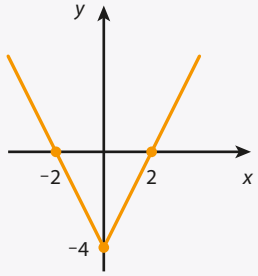


Signe du paramètre a : _____

Pentes des demi-droites : _____

Règle de la fonction : _____

b) La fonction g



Signe du paramètre a : _____

Pentes des demi-droites : _____

Règle de la fonction : _____

© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 251

2. Manipulation d'expressions algébriques avec valeur absolue

Comme c'est le cas pour la fonction que vous avez déterminée dans l'activité d'exploration, il peut arriver que la règle d'une fonction valeur absolue ne soit pas écrite initialement sous la forme canonique. Il est cependant possible de la transformer à l'aide de manipulations algébriques qui mettent à profit les propriétés des valeurs absolues que l'on va maintenant mettre en évidence.

5 Répondez aux questions suivantes en justifiant chacune de vos réponses par un raisonnement ou un **contre-exemple**.

a) L'énoncé suivant est-il vrai ?

> La valeur absolue du produit de deux nombres est égale au produit des valeurs absolues de ces nombres.
>
> $$|a \times b| = |a| \times |b|$$

b) Peut-on en dire autant si on remplace la multiplication par une division ?

c) Qu'en est-il si on remplace la multiplication par une addition ou une soustraction ?

d) Et que pensez-vous de l'égalité suivante : est-elle vraie ou fausse ?

$$|a - b| = |b - a|$$

STRATÉGIE **Démontrer par un contre-exemple**

Pour démontrer qu'un énoncé est **faux**, il suffit de donner un seul contre-exemple. Dans la présente situation, il pourrait s'agir d'un exemple de valeurs possibles de a et de b pour lesquelles l'égalité est fausse.

L'exigence n'est pas du tout la même pour démontrer que l'énoncé est **vrai**. En effet, dans ce cas, il ne suffit pas de donner un ou plusieurs exemples qui le valident. Il faut plutôt expliquer à l'aide d'un raisonnement pourquoi l'énoncé est vrai quel que soit l'exemple choisi.

CORRIGÉ PAGE 251

© SOFAD – Reproduction interdite.

À RETENIR

Propriétés de la valeur absolue

La valeur absolue du produit (ou du quotient) de deux nombres est égale au produit (ou au quotient) des valeurs absolues de ces nombres.

1) $|a \times b| = |a| \times |b|$

2) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Ces propriétés sont utiles pour écrire la règle d'une fonction valeur absolue sous la forme canonique.

Exemple :

Soit la fonction valeur absolue $f(x) = -12\left|\frac{10 - 5x}{3}\right|$.

Pour écrire cette règle sous la forme canonique, on peut réduire l'expression de droite.

$$\begin{aligned}
-12\left|\frac{10 - 5x}{3}\right| &= -12\frac{|10 - 5x|}{|3|} && \text{(Propriété de la valeur absolue d'un quotient)}\\
&= -12\frac{|10 - 5x|}{3} && \text{(Calcul de la valeur absolue de 3)}\\
&= -4|10 - 5x| && \text{(Réduction)}\\
&= -4|-5x + 10| && \text{(Commutativité de l'addition)}\\
&= -4|-5(x - 2)| && \text{(Mise en évidence du coefficient de } x\text{)}\\
&= -4|-5||x - 2| && \text{(Propriété de la valeur absolue d'un produit)}\\
&= -4(5)|x - 2| && \text{(Calcul de la valeur absolue de } -5\text{)}\\
&= -20|x - 2| && \text{(Réduction)}
\end{aligned}$$

La règle sous la forme canonique est $f(x) = -20|x - 2|$.

Les valeurs des paramètres sont : $a = -20$, $h = 2$ et $k = 0$.

© SOFAD – Reproduction interdite.

EXERCEZ-VOUS

6 Écrivez les règles suivantes sous la forme canonique. Déduisez-en la valeur des paramètres a, h et k.

a) $f(x) = 2 - |4 - 2x|$

$a =$ _____ $h =$ _____ $k =$ _____

b) $g(x) = 3\left|\frac{-x}{3} - 1\right| + 1$

$a =$ _____ $h =$ _____ $k =$ _____

ASTUCE

Pour valider votre réponse, calculez l'image de quelques nombres en utilisant la règle initiale, puis vérifiez que vous obtenez le même résultat avec la règle sous la forme canonique.

7 Maximilio part de chez lui en voiture. Il doit d'abord sortir du village où il habite, ce qui lui prend 5 min, puis il prend une route sur laquelle il roule à 90 km/h. Il y a une station-service sur cette route à 12 km du village.

La distance qui sépare Maximilio de la station-service est une fonction du temps écoulé depuis qu'il est parti de chez lui. Sachant que 90 km/h équivaut à 1,5 km/min, on peut établir la règle suivante :

$$d(t) = |1{,}5(t - 5) - 12|\ ,$$

où $d(t)$ est la distance (km) et t, le temps écoulé (m).

Cette règle est valable pour des temps de 5 min ou plus, puisque pendant les 5 premières minutes, il n'est pas sur la route, mais bien en circulation dans le village.

a) Déterminez la distance entre Maximilio et la station-service,

1) après 5 min : _____

2) après 15 min : _____

b) Écrivez la règle de cette fonction sous la forme canonique.

c) À quel moment Maximilio est-il passé devant la station de service ? Justifiez votre réponse.

Concernant la situation-problème 1.2, *Une porte coulissante*, vous êtes maintenant en mesure d'écrire la règle de chacune des fonctions qui permettent de calculer les distances entre les personnes et la porte coulissante. En représentant graphiquement ces deux fonctions dans le même plan cartésien et en tenant compte des autres contraintes, vous serez en mesure d'analyser ce qui se passe et de répondre à la question posée.

CORRIGÉ PAGE 252

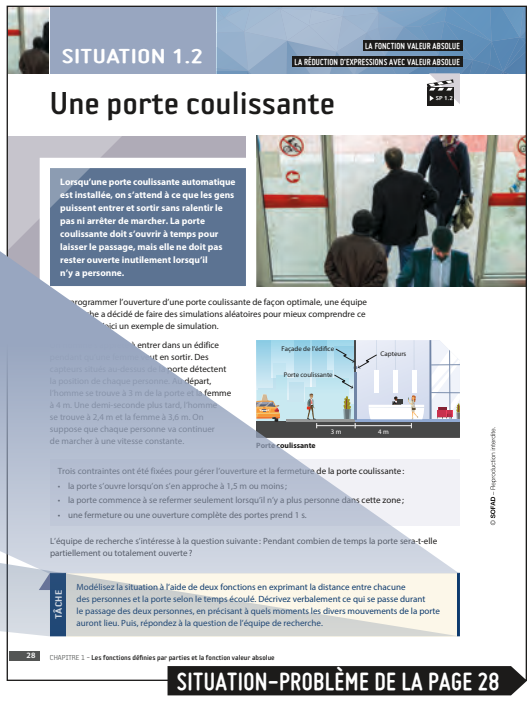
© SOFAD – Reproduction interdite.

RÉSOLUTION

Vous êtes maintenant en mesure de compléter la résolution de la situation-problème 1.2.

TÂCHE

Modélisez la situation à l'aide de deux fonctions en exprimant la distance entre chacune des personnes et la porte selon le temps écoulé. Décrivez en mots ce qui se passe durant le passage des deux personnes, en précisant à quels moments les divers mouvements de la porte auront lieu. Puis, répondez à la question de l'équipe de recherche.


SITUATION 1.2

LA FONCTION VALEUR ABSOLUE
LA RÉDUCTION D'EXPRESSIONS AVEC VALEUR ABSOLUE

Une porte coulissante

Lorsqu'une porte coulissante automatique est installée, on s'attend à ce que les gens puissent entrer et sortir sans ralentir le pas ni arrêter de marcher. La porte coulissante doit s'ouvrir à temps pour laisser le passage, mais elle ne doit pas rester ouverte inutilement lorsqu'il n'y a personne.

Façade de l'édifice
Capteurs
Porte coulissante
3 m
4 m

Trois contraintes ont été fixées pour gérer l'ouverture et la fermeture de la porte coulissante :
- la porte s'ouvre lorsqu'on s'en approche à 1,5 m ou moins ;
- la porte commence à se refermer seulement lorsqu'il n'y a plus personne dans cette zone ;
- une fermeture ou une ouverture complète des portes prend 1 s.

L'équipe de recherche s'intéresse à la question suivante : Pendant combien de temps la porte sera-t-elle partiellement ou totalement ouverte ?

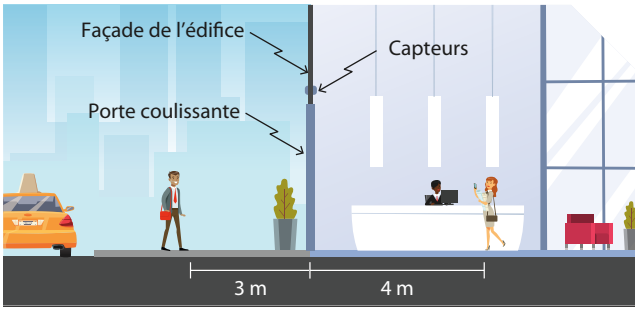
TÂCHE
Modélisez la situation à l'aide de deux fonctions en exprimant la distance entre chacune des personnes et la porte selon le temps écoulé. Décrivez verbalement ce qui se passe durant le passage des deux personnes, en précisant à quels moments les divers mouvements de la porte auront lieu. Puis, répondez à la question de l'équipe de recherche.

28 CHAPITRE 1 – Les fonctions définies par parties et la fonction valeur absolue

SITUATION-PROBLÈME DE LA PAGE 28

Rappel des données du problème

Un homme et une femme se dirigent vers une porte coulissante, selon le schéma ci-contre.



Porte coulissante

- Après 0,5 s, l'homme se trouve à 2,4 m et la femme à 3,6 m de la porte. (Donc, leurs vitesses de marche sont respectivement de 1,2 m/s et de 0,8 m/s.)
- La porte s'ouvre lorsqu'on s'en approche à 1,5 m ou moins.
- La porte commence à se refermer seulement lorsqu'il n'y a plus personne dans cette zone.
- Une fermeture ou une ouverture complète des portes prend 1 s.
- L'équipe de recherche s'intéresse principalement à la question suivante : Pendant combien de temps la porte sera-t-elle partiellement ou totalement ouverte ?

Résolution

© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 252

Résolution (*suite*)

Description :

Réponse :

CORRIGÉ PAGE 252

© SOFAD – Reproduction interdite.

Savoirs mathématiques visés :
- déterminer et interpréter les propriétés d'une fonction valeur absolue ;
- déterminer la règle d'une fonction valeur absolue à partir du graphique.

1. Les propriétés d'une fonction valeur absolue

Cette section aborde les propriétés de la fonction valeur absolue que l'on peut déduire directement de ses paramètres. Lorsqu'il y a lieu, ces propriétés doivent être interprétées en tenant compte du contexte, comme c'est le cas dans l'exemple suivant.

1 Une compétition de robotique comporte une épreuve de précision. Le robot de chaque équipe doit verser exactement 5 cl de liquide dans une éprouvette. Selon le résultat obtenu, l'équipe qui a conçu le robot se voit accorder un certain nombre de points P qui dépend du volume v de liquide versé en centilitres. Ce nombre de points (qui peut être négatif) est calculé à l'aide de la formule suivante :

$$P = 20 - 5|v - 5|$$

L'éprouvette peut contenir au maximum 10 cl de liquide.

a) Représentez graphiquement cette fonction en tenant compte du contexte.

b) Quel pointage va recevoir une équipe si son robot a mis 54 ml de liquide dans l'éprouvette ?

c) Quel est le pointage maximal que l'on peut avoir pour cette épreuve ?

d) Dans quel intervalle la fonction est-elle croissante ? Dans quel intervalle est-elle décroissante ? Qu'est-ce que cela signifie dans ce contexte ?

e) Déterminez le ou les zéros de la fonction. Interprétez votre réponse en tenant compte du contexte.

f) Pour quels volumes de liquide l'équipe perdra-t-elle des points ? Combien de points peut-elle perdre au maximum ?

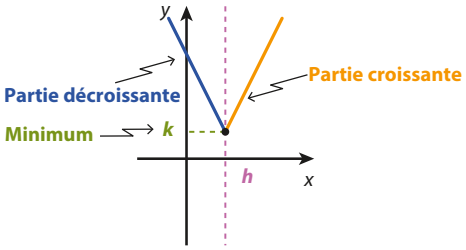
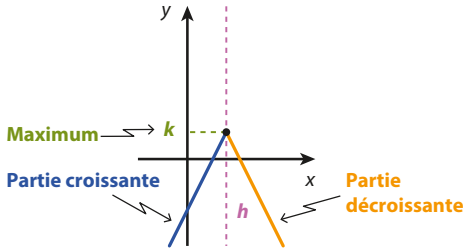
© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 253

À RETENIR

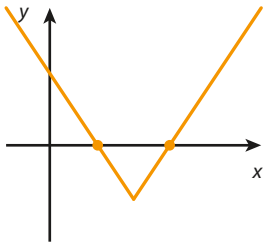
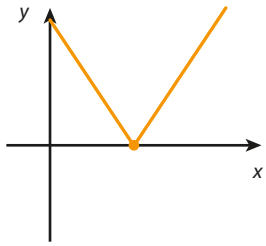
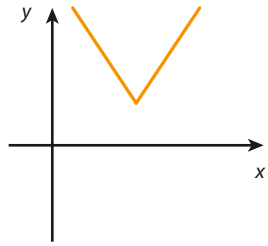
Les propriétés de la fonction valeur absolue

On peut déduire certaines propriétés de la fonction à l'aide des paramètres de sa règle écrite sous la forme canonique : $f(x) = \boldsymbol{a}|x - \boldsymbol{h}| + \boldsymbol{k}$.

	Si $a > 0$	Si $a < 0$
Extremum	k est le minimum de la fonction.	k est le maximum de la fonction.
Variation	Intervalle de croissance : $[h, +\infty[$. Intervalle de décroissance : $]-\infty, h]$.	Intervalle de croissance : $]-\infty, h]$. Intervalle de décroissance : $[h, +\infty[$.
Exemple		

Les zéros de la fonction valeur absolue

Une fonction valeur absolue peut avoir deux zéros, un seul zéro ou aucun zéro, selon la position de son graphique par rapport à l'axe des abscisses. On peut déterminer le nombre de zéros en observant le signe des paramètres a et k.

	Deux zéros	Un seul zéro	Aucun zéro
Critère	Si les paramètres a et k sont de signes contraires et $k \neq 0$.	Si $k = 0$.	Si les paramètres a et k ont le même signe et $k \neq 0$.
Exemple	$a > 0$ et $k < 0$ 	$a > 0$ et $k = 0$ 	$a > 0$ et $k > 0$ 

TIC L'activité TIC 1.2.2 permet d'observer l'effet des paramètres sur la fonction valeur absolue à l'aide de GeoGebra. Cette activité est disponible sur portailsofad.com.

© SOFAD – Reproduction interdite.

Il est possible de déterminer algébriquement les zéros d'une fonction valeur absolue en posant $f(x) = 0$ et en résolvant l'équation qui en résulte. Pour ce faire, on doit d'abord isoler la valeur absolue afin d'obtenir une équation de la forme $|x - h| = c$, où c est une constante.

- Si $c > 0$, il y a deux zéros qui sont $h - c$ et $h + c$.
- Si $c = 0$, il n'y a qu'un seul zéro qui est égal à h.
- Si $c < 0$, il n'y a aucun zéro, car il est impossible qu'une valeur absolue soit égale à un nombre négatif.

ASTUCE

Quand la fonction est écrite sous la forme canonique, la valeur de la constante c est égale à $-\frac{k}{a}$.

Exemple :

Soit la fonction $f(x) = -2|x + 1| + 3$. Les valeurs des paramètres sont : $a = -2$, $h = -1$ et $k = 3$.

Comme la valeur de a est négative, cette fonction possède un maximum qui est 3. La fonction est croissante sur l'intervalle $]-\infty, -1]$ et décroissante sur l'intervalle $[-1, +\infty[$.

Le signe de k étant différent de celui de a, la fonction possède deux zéros. On peut les déterminer algébriquement de la façon ci-contre :

$$-2|x + 1| + 3 = \mathbf{0}$$
$$-2|x + 1| = -3$$
$$|x + 1| = 1{,}5$$
$$x + 1 = 1{,}5 \text{ ou } x + 1 = -1{,}5$$
$$x = 0{,}5 \text{ ou } \quad x = -2{,}5$$

Les zéros de cette fonction sont 0,5 et $-2{,}5$.

EXERCEZ-VOUS

2 Pour effectuer un virage serré, la vitesse d'un cycliste varie selon la règle suivante jusqu'à ce qu'il retrouve sa vitesse initiale.

$$v(t) = 4{,}2|t - 5| + 15 \text{ ,}$$

où v est la vitesse du cycliste (km/h) et t, le temps écoulé (s).

a) Quelle est la vitesse initiale du cycliste ? _____

b) Selon le contexte, quel est le domaine de la fonction v ? _____

c) Quel est le minimum de cette fonction et que signifie-t-il dans ce contexte ?

_____

d) Dans quel intervalle la fonction est-elle croissante ? _____

e) Cette fonction a-t-elle un zéro ? Justifiez votre réponse.

_____

3 Indiquez le nombre de zéros que possède chacune des fonctions suivantes, puis déterminez ces zéros s'il y a lieu.

a) $f_1(x) = -3|x - 2|$ _____

b) $f_2(x) = |x - 3| - 2$ _____

c) $f_3(x) = -2|x| - 3$ _____

© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 254

2. Déterminer la règle d'une fonction valeur absolue

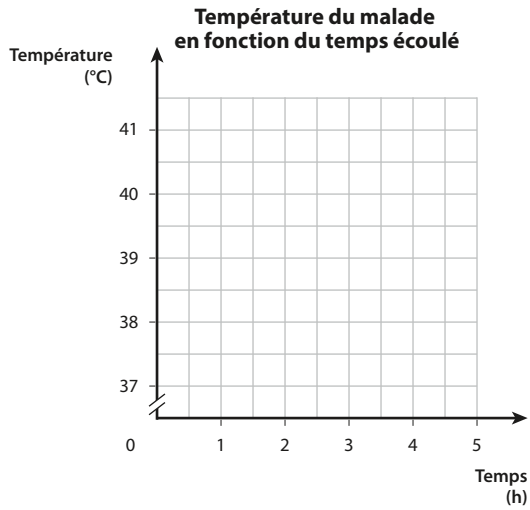
Lorsque la fonction valeur absolue est associée à un contexte où il est question de distance ou d'écart entre deux nombres, il est habituellement possible de déterminer la règle de la fonction en traduisant directement le contexte par des expressions algébriques. Par contre, il existe des situations, telle la prochaine question, où on ne peut déterminer la règle qu'en passant par la représentation graphique de la fonction.

4 Une infirmière a mesuré et noté la température d'un malade toutes les 2 h. Compte tenu des médicaments qui lui ont été administrés, on suppose que la température du malade a atteint un maximum, puis qu'elle est descendue au même rythme qu'elle est montée.

Température du malade en fonction du temps écoulé

Temps écoulé (h)	Température (°C)
0	38
2	40,4
4	39,2

a) À partir de la table de valeurs, tracez dans le plan ci-contre une esquisse graphique de la fonction.



b) Déterminez la pente de la droite qui passe par les deux premiers points du graphique. Quelle est l'équation de cette droite ?

c) Quelle est l'équation de la droite symétrique à la première qui passe par le troisième point ?

d) Déterminez les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites. À quel moment la température a-t-elle atteint un maximum ? Quel a été ce maximum ?

e) La température du malade peut s'exprimer comme une fonction valeur absolue du temps écoulé. Quelle est la règle de cette fonction ?

© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 254

À RETENIR

Déterminer la règle d'une fonction valeur absolue à partir du graphique

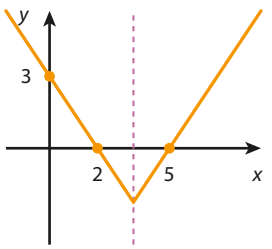
Pour déterminer la règle d'une fonction valeur absolue, on peut observer certaines caractéristiques de son graphique :

- les pentes des demi-droites et l'orientation du V permettent de déterminer la valeur de a ;
- la position de l'axe de symétrie permet de déterminer la valeur de h ;
- l'extremum de la fonction permet de déterminer la valeur de k.

Dans certains cas, les paramètres sont déterminés à l'aide de raisonnements qui peuvent comporter la résolution d'une équation ou d'un système d'équations.

Exemple :

Voici une fonction valeur absolue pour laquelle les coordonnées à l'origine sont données.



Pour déterminer la règle de la fonction, on applique le raisonnement suivant :

- Pente de la demi-droite du côté gauche : $\frac{3-0}{0-2} = -1{,}5$.
- Selon l'orientation du graphique, $a > 0$. Donc $a = 1{,}5$.
- L'axe de symétrie du graphique est la moyenne des deux abscisses à l'origine : $\frac{2+5}{2} = 3{,}5$. Donc $h = 3{,}5$.
- Il en résulte que la règle peut s'écrire sous la forme $f(x) = 1{,}5|x - 3{,}5| + k$.
- On calcule la valeur de k en se servant des coordonnées de l'un des points, par exemple avec (5, 0) :

  $0 = 1{,}5|5 - 3{,}5| + k$

  $0 = 1{,}5(1{,}5) + k$

  $k = -2{,}25$

  La règle de la fonction : $f(x) = 1{,}5|x - 3{,}5| - 2{,}25$.

© SOFAD – Reproduction interdite.

EXERCEZ-VOUS

5 Faites une esquisse graphique des fonctions valeurs absolues suivantes, puis déterminez leur règle.

a) Le seul zéro de la fonction *f* est 5 et son ordonnée à l'origine est $^{-}5$.

b) La fonction *g* est négative dans l'intervalle [0, 5] et a un minimum de $^{-}5$.

c) L'intervalle de croissance de la fonction *h* est [1, $^{+}\infty$[. Son ordonnée à l'origine est 1 et la fonction passe par le point (3, 3).

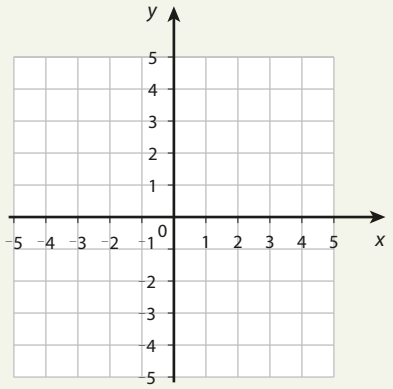
© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 254

CONSOLIDATION

1 À partir de la règle donnée, représentez graphiquement la fonction *f*. Par la suite, faites l'étude de cette fonction en complétant les informations demandées dans cette fiche.

$f(x) = \frac{2}{3}|x + 1| - 2$



Domaine de *f* :

Image de *f* :

Ordonnée à l'origine :

Maximum de la fonction :

Minimum de la fonction :

Zéros de la fonction :

Intervalle de croissance :

Intervalle de décroissance :

Dans quelle partie du domaine cette fonction est-elle :

positive ?

négative ?

2 Écrivez les règles suivantes sous la forme canonique $f(x) = a|x - h| + k$. Puis, déduisez les valeurs des paramètres *a*, *h* et *k*.

a) $f(x) = 5 - |2 - 4x|$

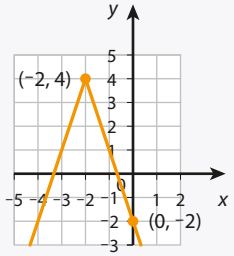
b) $g(x) = 9\left|\frac{-2x}{3} + 6\right|$

$a =$ _____ $h =$ _____ $k =$ _____

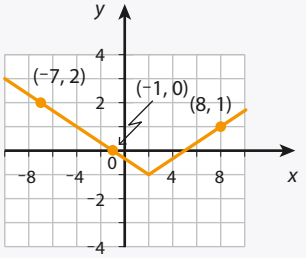
$a =$ _____ $h =$ _____ $k =$ _____

3 Déterminez la règle des fonctions valeurs absolues représentées ci-dessous.

a)



b)



© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 255

4 Déterminez la règle de la fonction valeur absolue qui possède les propriétés suivantes. Expliquez votre raisonnement.

La fonction :

- a un maximum de 8 ;
- est positive dans l'intervalle $[^{-}4, 6]$;
- est décroissante dans l'intervalle $[1, {}^{+}\infty[$.

5 Déterminez le nombre de zéros de chacune des fonctions suivantes. Lorsqu'ils existent, donnez-en la valeur.

a) $f(x) = {}^{-}7|x + 12|$ Nombre de zéros : _____

b) $g(x) = 4|x - 2| - 8$ Nombre de zéros : _____

c) $h(x) = 3|x + 6| + 2$ Nombre de zéros : _____

6 Une coureuse olympique propose un défi à un de ses amis. Elle lui offre de faire une course avec elle sur une piste d'athlétisme ovale de 400 m, mais elle le laisse partir avant elle. Au début de l'observation, le coureur est à 50 m devant l'olympienne et court à une vitesse constante de 5,3 m/s, alors que la coureuse court à une vitesse constante de 7,8 m/s.

REMARQUE : Pour cette tâche, on négligera le temps d'accélération en début de course.

a) Quelle règle de fonction valeur absolue sous sa forme canonique décrit la relation de la distance entre les deux amis selon le temps écoulé depuis le départ de la course ?

b) Quelles doivent être les limites imposées au domaine de la fonction dans le contexte de la situation ?

c) Quel est le sommet du graphique de cette fonction et que représente-t-il dans ce contexte ?

d) Lorsque la coureuse aura fait un tour de piste après le début de l'observation, quelle distance séparera les coureurs ?

© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 256

7 Un professeur de science invite ses élèves à réaliser une expérience dans laquelle ils détermineront la valeur de l'accélération gravitationnelle terrestre, c'est-à-dire l'accélération que subit un corps en chute libre sur Terre.

Pour déterminer si les élèves ont produit une expérimentation de qualité, l'enseignant se sert d'un outil qu'on appelle l'erreur relative. Cet outil est en fait une formule qui quantifie les erreurs de manipulations en comparant la valeur obtenue lors d'une expérience en laboratoire à la valeur théorique acceptée par la communauté scientifique.

Formule permettant de calculer l'erreur relative :

$$E_R = \frac{|V_c - V_t|}{V_t}$$

Variables :

E_R : Erreur relative

V_c : Valeur calculée en laboratoire

V_t : Valeur théorique

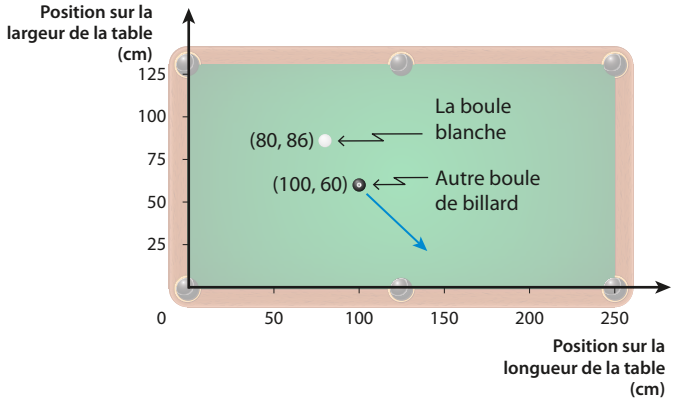
L'enseignant considère qu'une expérimentation en laboratoire est réussie lorsque l'erreur relative se situe en dessous de 5 %. Sachant que la valeur théorique de l'accélération gravitationnelle est 9,81 m/s^2, quelles sont les valeurs acceptables que pourraient produire ses élèves ? Justifiez votre démarche.

© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 257

8 Deux amis jouent au billard. L'un d'eux prétend pouvoir frapper directement la boule noire et terminer la partie en faisant un ricochet par la bande et en l'entrant dans un coin. L'autre croit que les boules sont mal alignées pour réussir ce coup. La situation est décrite dans le plan ci-dessous.

- Déterminez si la boule sera empochée ou non en frappant directement la boule noire avec la boule blanche, centre à centre, sachant que, s'il n'y a pas d'effet mis sur la boule, les trajectoires de la boule avant et après le rebond forment avec la bande des angles de mêmes mesures.
- Si la boule n'est pas empochée, quelle bande à côté du trou frappera-t-elle : la bande horizontale ou la bande verticale ?



© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 257

9 Deux cyclistes roulent sur une piste cyclable en sens opposé se dirigeant l'un vers l'autre. Le premier cycliste roule à une vitesse de 4,5 m/s et le deuxième, à 7,5 m/s. Au départ, 90 m les séparent.

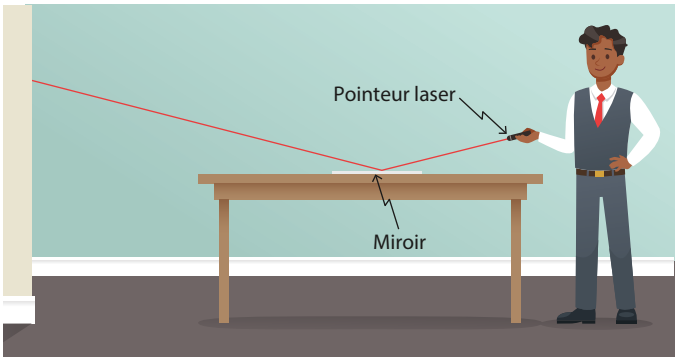
a) Exprimez la distance (m) séparant les deux cyclistes en fonction du temps écoulé (s). Écrivez la règle sous la forme canonique.

b) Quel est l'intervalle de croissance de cette fonction ? Qu'est-ce que cet intervalle signifie dans ce contexte ?

c) En quoi la règle de la fonction en a) serait-elle différente si le premier cycliste roulait dans le même sens que le deuxième en le précédant ?

d) Déterminez l'intervalle de croissance de cette nouvelle fonction. Interprétez cet intervalle en tenant compte du contexte.

10 Un pointeur laser tenu à 15 cm au-dessus d'une table envoie un rayon qui est réfléchi sur un miroir déposé sur la table pour atteindre ensuite un mur à 2,4 m du pointeur, comme le montre le schéma ci-contre. Le point touché par le laser sur le miroir se situe à 80 cm du sol et à 1,8 m du mur.



REMARQUE : On peut négliger l'épaisseur du miroir.

Sachant que la trajectoire du rayon laser peut être modélisée par une valeur absolue, à quelle hauteur le rayon laser touche-t-il le mur ?

© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 258

SAVOIRS EN RÉSUMÉ

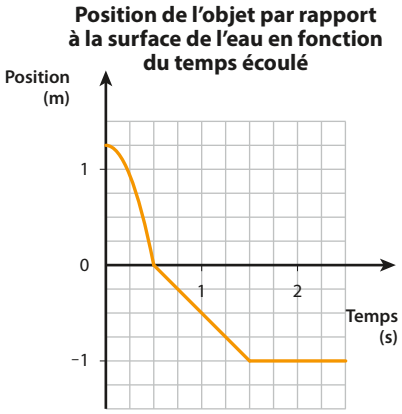
Voici un résumé de tous les savoirs **À RETENIR**. Écrivez les informations manquantes.

Les fonctions définies par parties

Une fonction définie par parties est une fonction dont la règle diffère selon l'intervalle dans lequel se situe la variable _____. On donne le nom de _____ aux valeurs de la variable indépendante qui séparent deux parties successives de la fonction.

Exemple :

On lance un objet dans un étang peu profond. Voici une fonction décrivant cette situation.

Représentation graphique	Règle de la fonction et valeurs critiques
	Soit $p(t)$ la position de l'objet (m) par rapport à la surface de l'eau et t le temps écoulé (s). $p(t) = \begin{cases} -5t^2 + 1{,}25 & \text{si } __ \leq t < __ \\ -t + 0{,}5 & \text{si } __ \leq t < __ \\ -1 & \text{si } t \geq __ \end{cases}$ Les valeurs critiques sont _____ et _____.

Les fonctions définies par parties qui sont discontinues

Une fonction définie par partie est discontinue en une valeur critique si le graphique de la fonction est _____.

Dans le graphique d'une fonction discontinue, un point _____ à l'extrémité d'une ligne indique que cette extrémité fait partie du graphique, alors qu'un point _____ indique que l'extrémité n'en fait pas partie. L'image d'une valeur critique correspond toujours à l'ordonnée du point plein.

© SOFAD – Reproduction interdite.

RÉSUMÉ DES SAVOIRS PAGE 204

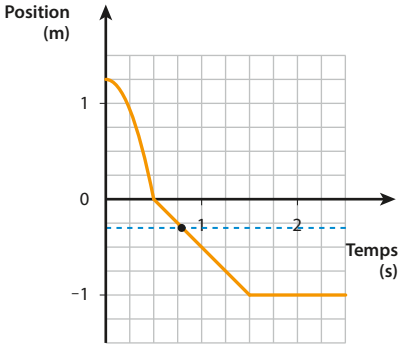
Les valeurs de la variable indépendante pour une image donnée

Pour déterminer les valeurs de la variable indépendante pour une image donnée, on vérifie d'abord _____. Cela permet de choisir la ou les règles appropriées pour effectuer les calculs.

Exemple :

Soit la fonction $p(t)$ de l'exemple précédent. Pour déterminer à quel moment l'objet lancé se trouve à 30 cm sous l'eau :

- on constate graphiquement qu'un seul point possède une ordonnée égale à $-0{,}3$ m ;
- on calcule l'abscisse du point à l'aide de la règle appropriée.



Celui-ci se situe dans l'intervalle $[0{,}5 ; 1{,}5[$; la règle à utiliser est $p(t) =$ _____.

_____

_____

_____

L'objet se trouve à 30 cm sous l'eau, à 0,8 s.

Interpréter les propriétés d'une fonction définie par parties

Interpréter les propriétés consiste à expliquer ce qu'elles signifient en tenant compte du contexte.

Exemple :

Dans la situation de l'objet jeté à l'eau, on peut interpréter les propriétés de la façon suivante :

Domaine : La **modélisation** est valable quelle que soit la durée de l'observation, soit _____.

Image : La position de l'objet varie de _____, soit $[-1 ; 1{,}25[$ m.

Valeur initiale : L'objet se situe à _____ au départ.

Minimum : Au plus bas, l'objet se situe à _____.

Variation : La fonction est _____ sur tout son domaine, car l'objet ne s'élève jamais.

Elle est constante après _____.

Zéro : L'objet touche l'eau à _____.

Signe : La fonction est positive _____ et négative _____.

Cela signifie que jusqu'à 0,5 s, l'objet est au-dessus de l'eau ; après il est sous l'eau.

© SOFAD – Reproduction interdite.

RÉSUMÉ DES SAVOIRS PAGE 205

Les fonctions périodiques

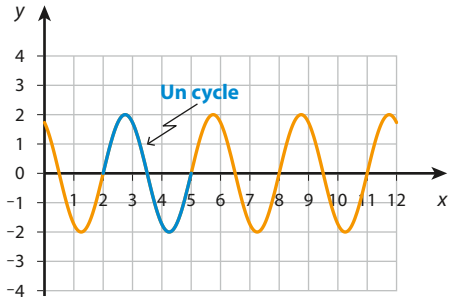
Une fonction, dont le graphique est constitué d'un motif qui se répète par translation horizontale sur la totalité de son domaine, porte le nom de « fonction périodique ». Le motif qui se répète est _____.

La période de la fonction est _____ qui contient un cycle complet.

Lorsqu'une fonction est périodique, certains éléments du domaine ont la même image :

$f(x)$ _____

Exemple :

Représentation graphique et cycle d'une fonction périodique	Période de la fonction
	Le cycle indiqué par la ligne bleue dans le graphique est inscrit dans l'intervalle qui va de 2 à 5 sur l'axe des x. La période de la fonction est donc égale à 3, soit $5 - 2$.

La fonction valeur absolue

La valeur absolue d'un nombre x, notée $|x|$, est définie algébriquement de la façon suivante :

$$|x| = \begin{cases} ____ & \text{si } x \geq 0 \\ ____ & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Une fonction valeur absolue est une fonction dont la règle peut s'écrire sous la forme canonique

_____ ,

où les paramètres a, h et k sont des nombres réels.

Le graphique de cette fonction a la forme d'un V (si a est _____) ou d'un V inversé (si a est _____). Plus précisément, le graphique a les caractéristiques suivantes :

- il possède un axe de symétrie vertical dont l'équation est _____ ;
- il est formé de deux demi-droites de même origine dont les pentes valent respectivement _____ ;
- l'origine des demi-droites, appelée « sommet », est située sur l'axe de symétrie, aux coordonnées _____.

© SOFAD – Reproduction interdite.

Exemple :

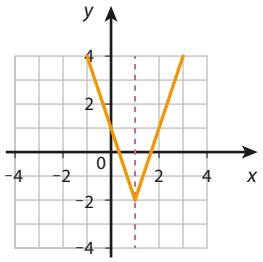
Soit la fonction $f(x) = 3|x - 1| - 2$.

Valeur des paramètres : $a =$; $h =$; $k =$

Axe de symétrie : $x =$

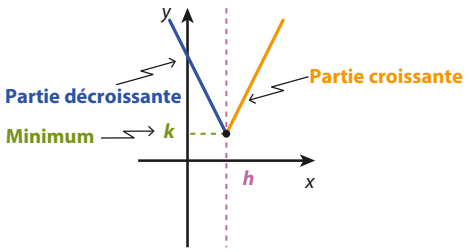
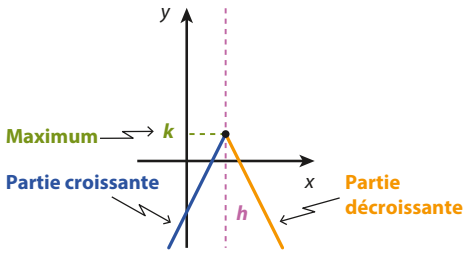
Pente des demi-droites : et

Coordonnées du sommet :



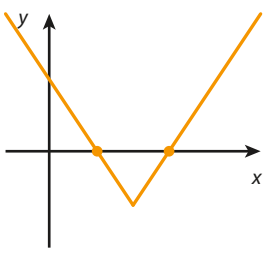
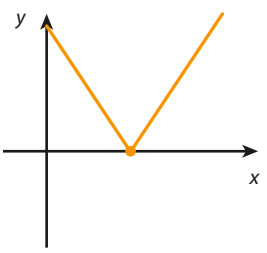
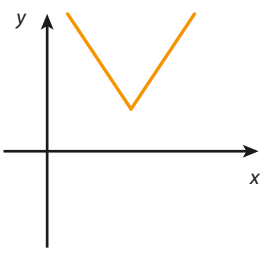
Les propriétés de la fonction valeur absolue

On peut déduire certaines propriétés de la fonction à l'aide des paramètres de sa règle écrite sous la forme canonique $f(x) = \boldsymbol{a}|x - \boldsymbol{h}| + \boldsymbol{k}$.

	Si $a > 0$	Si $a < 0$
Extremum	k est le de la fonction.	k est le de la fonction.
Variation	Intervalle de croissance : . Intervalle de décroissance : .	Intervalle de croissance : . Intervalle de décroissance : .
Exemple :		

Les zéros de la fonction valeur absolue

Une fonction valeur absolue peut avoir deux zéros, un seul zéro ou aucun zéro, selon la position de son graphique par rapport à l'axe des abscisses. On peut déterminer le nombre de zéros en observant le signe des paramètres a et k.

	Deux zéros	Un seul zéro	Aucun zéro
Critère	Si les paramètres a et k et .	Si .	Si les paramètres a et k et .
Exemple	$a > 0$ et $k < 0$ 	$a > 0$ et $k = 0$ 	$a > 0$ et $k > 0$ 

© SOFAD – Reproduction interdite.

RÉSUMÉ DES SAVOIRS PAGE 207

Exemple :

Soit la fonction $f(x) = 3|x - 1| - 2$.

- La valeur des paramètres : $a = 3$, $h = 1$ et $k = -2$.
- Le signe de k étant différent de celui de a, la fonction possède deux zéros. On peut les déterminer algébriquement de la façon suivante :

$3|x - 1| - 2 = 0$

Les zéros sont ____ et ____.

$x =$ ____

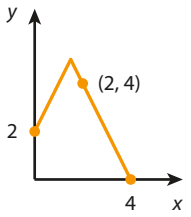
Déterminer la règle d'une fonction valeur absolue à partir du graphique

Pour déterminer la règle d'une fonction valeur absolue, on peut observer certaines caractéristiques de son graphique :

- les pentes des demi-droites et l'orientation du V permettent de déterminer ____ ;
- la position de l'axe de symétrie permet de déterminer ____ ;
- l'extremum de la fonction permet de déterminer ____.

Exemple :

Soit le graphique d'une fonction valeur absolue.



Pour déterminer la règle de la fonction, on applique le raisonnement suivant :

- Pente du segment qui passe par les points (2, 4) et (4, 0) : ____.
- Comme le V est inversé, le paramètre a doit être négatif. Donc $a =$ ____.
- Pour déterminer les coordonnées du sommet, on doit résoudre un système d'équations.

Équation du segment à droite de l'axe de symétrie : $y =$ ____.

Équation de l'autre segment qui passe par (0, 2) : $y =$ ____.

Le système d'équations à résoudre est ____.

Par réduction : ____

Valeur de x : ____

Les coordonnées du sommet sont (1,5; 5).

La règle de la fonction est $f(x) =$ ____.

Propriétés de la valeur absolue

La valeur absolue du produit (ou du quotient) de deux nombres est égale au produit (ou au quotient) des valeurs absolues de ces nombres.

1) $|a \times b| = |a| \times |b|$

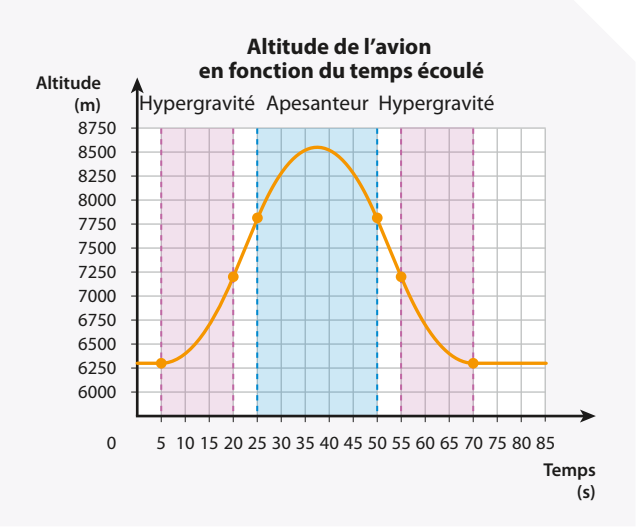
2) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

© SOFAD – Reproduction interdite.

RÉSUMÉ DES SAVOIRS PAGE 208

INTÉGRATION

1 La représentation graphique ci-dessous décrit les différentes phases d'un vol parabolique qui permet de faire vivre l'apesanteur aux passagers d'un avion pendant quelques secondes.



«Au début, l'avion est à une altitude de 6300 m. Puis 5 s plus tard, il se met à accélérer en s'élevant rapidement durant 15 s. On parle d'une phase d'hypergravité. Suit une phase de transition de 5 s, de 7200 m à 7800 m, pendant laquelle le pilote diminue graduellement la puissance des moteurs. Lorsque les moteurs sont à la puissance minimale, commence la phase d'apesanteur qui dure 25 s. L'avion est alors comme une roche lancée dans le ciel. Il suit une trajectoire parabolique. C'est à ce moment que les passagers ont l'impression de flotter à l'intérieur de la carlingue. L'avion atteint une altitude maximale de 8550 m, puis retombe. Le pilote redonne alors la pleine puissance aux moteurs et l'avion accélère, mais cette fois en descendant. Les mêmes phases de transition et d'hypergravité se suivent jusqu'à ce que l'avion revienne à l'altitude de départ.»

Écrivez la règle de cette fonction. Justifiez votre raisonnement.

© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 259

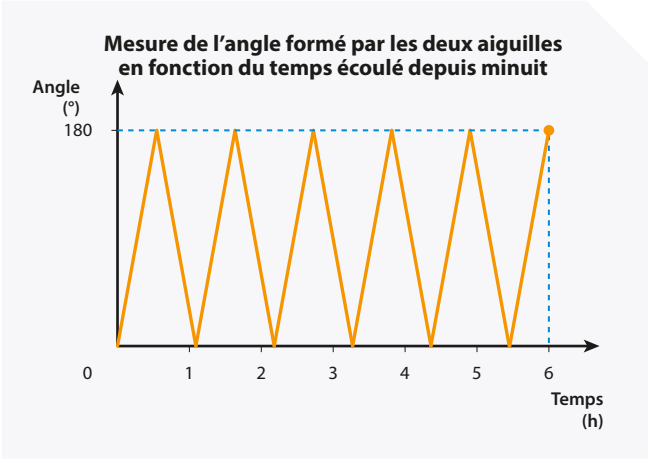
2 Mona s'est arrêtée à un passage à niveau, car les feux clignotants annoncent l'arrivée d'un train de banlieue. Elle doit attendre 20 s avant que le train commence à passer devant elle, puis un autre 8 s avant que les feux clignotants s'éteignent.

Sur une voie de ce type, les feux clignotants s'allument lorsque le train est encore à 500 m du passage à niveau et ils s'éteignent lorsque la queue du train est passée et se trouve à 50 m.

a) Déterminez la règle de la fonction valeur absolue qui représente la distance entre la tête du train et le passage à niveau.

b) Quelle est la longueur du train ?

3 Les aiguilles des horloges se déplacent avec régularité et il en est évidemment ainsi des angles qu'elles forment tout au long de la journée. La représentation graphique suivante, par exemple, montre ce qu'il en est entre minuit et 6 h.



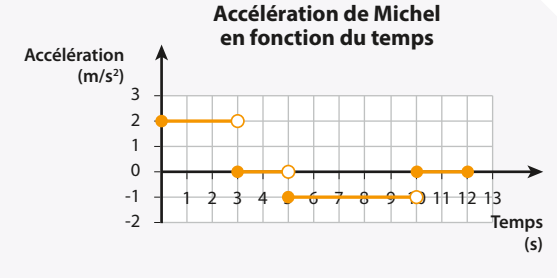
Ce matin, Andrew a fait la grasse matinée. Il s'est réveillé un peu avant 10 h 30. Lorsqu'il a regardé l'heure sur l'horloge de la cuisine, il a vu que les deux aiguilles formaient un angle de 180° exactement.

Quelle heure était-il ? Donnez votre réponse en heures et en minutes en arrondissant à la minute près.

© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 259

4 Michel s'est blessé durant les premiers instants d'une course de 100 m à laquelle il participait. Le graphique ci-contre est une modélisation de son accélération pendant les 12 premières secondes de sa course.



a) Selon vous, que signifie une accélération négative ?

b) Représentez graphiquement la vitesse de Michel en fonction du temps pour les 12 premières secondes.

c) Quelle est la vitesse maximale atteinte ?

d) Durant quel intervalle de temps sa vitesse a-t-elle diminué ?

e) Après 12 s, quelle distance avait-il parcourue ?

5 On a mesuré l'épaisseur d'un livre de 200 pages à l'aide d'une règle sans inclure la couverture. On a obtenu 1,1 cm. Cette mesure n'est pas nécessairement exacte, car tout instrument de mesure comporte une marge d'erreur, mais on peut certainement affirmer qu'elle est précise à $\pm$ 0,5 mm.

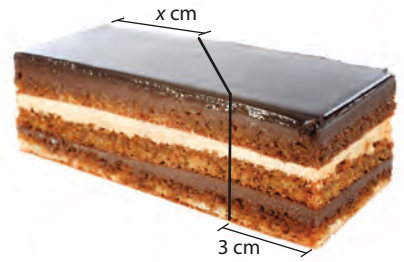
REMARQUE : Cela signifie que l'écart entre la mesure effectuée et la véritable épaisseur du livre est inférieure ou égale à 0,5 mm.

Traduisez cette situation par une inéquation avec valeur absolue dans laquelle la variable représente l'épaisseur d'une feuille du livre. Répondez ensuite à la question suivante : Dans quel intervalle se situe l'épaisseur d'une seule feuille du livre ? Donnez votre réponse en micromètres.

© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 260

6 Anfisa a découpé en deux une pâtisserie ayant la forme d'un prisme rectangulaire dont les dimensions de la base sont de 10 cm sur 3 cm, et dont la hauteur est de 3 cm. Elle a découpé la pâtisserie en biais, comme on l'a illustré, en faisant une coupe bien verticale à 3 cm de l'un des bouts de la pâtisserie. Cependant, elle n'est pas certaine que la coupe se termine aussi à 3 cm de l'autre bout ; c'est pourquoi la variable x décrit cette longueur.



a) Exprimez en fonction de x la différence D de volume entre le plus gros et le plus petit morceau.

Donnez la règle de cette fonction et représentez-la graphiquement.

b) En tenant compte du contexte, interprétez le zéro et l'ordonnée à l'origine de cette fonction.

7 Le graphique d'une fonction valeur absolue passe par les points (4, 2), (6, 7) et (10, 7).

Dans quelle partie de son domaine cette fonction est-elle négative ?

© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 260

8 Au cours d'une randonnée en forêt, Carla marche à 2,5 m seulement derrière une jeune femme qui avance à la même vitesse qu'elle, soit environ 0,8 m/s.

Carla se sent un peu mal à l'aise d'être aussi proche de cette jeune femme. Pour dissiper son malaise, elle décide de marcher à une nouvelle vitesse v pendant 10 s de manière que la distance d qui la séparera de celle-ci après ces 10 s ait au moins doublée.

Sachant que d est une fonction valeur absolue de v, à quelles vitesses Carla peut-elle marcher pendant 10 s pour que son malaise soit dissipé ?

9 a) Pour quelles valeurs de a et de b l'égalité suivante est-elle vraie ? Justifiez votre réponse.

$$|a + b| = |a| + |b|$$

b) Que devient la relation entre $|a + b|$ et $|a| + |b|$ dans les autres cas ? Émettez une conjecture à ce sujet, puis justifiez votre réponse.

© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 261

10 Dans la ville de Québec, Martha commence à descendre lentement un escalier de 60 marches à une vitesse d'environ 1 marche par seconde.

Au même moment, Rodrigue se met à monter le même escalier à une vitesse moyenne d'environ 1,5 marche par seconde. Rendu à la 42e marche, il se rend compte qu'il a oublié quelque chose chez lui. Sans perdre de temps, il redescend l'escalier à la même vitesse qu'il l'a monté.

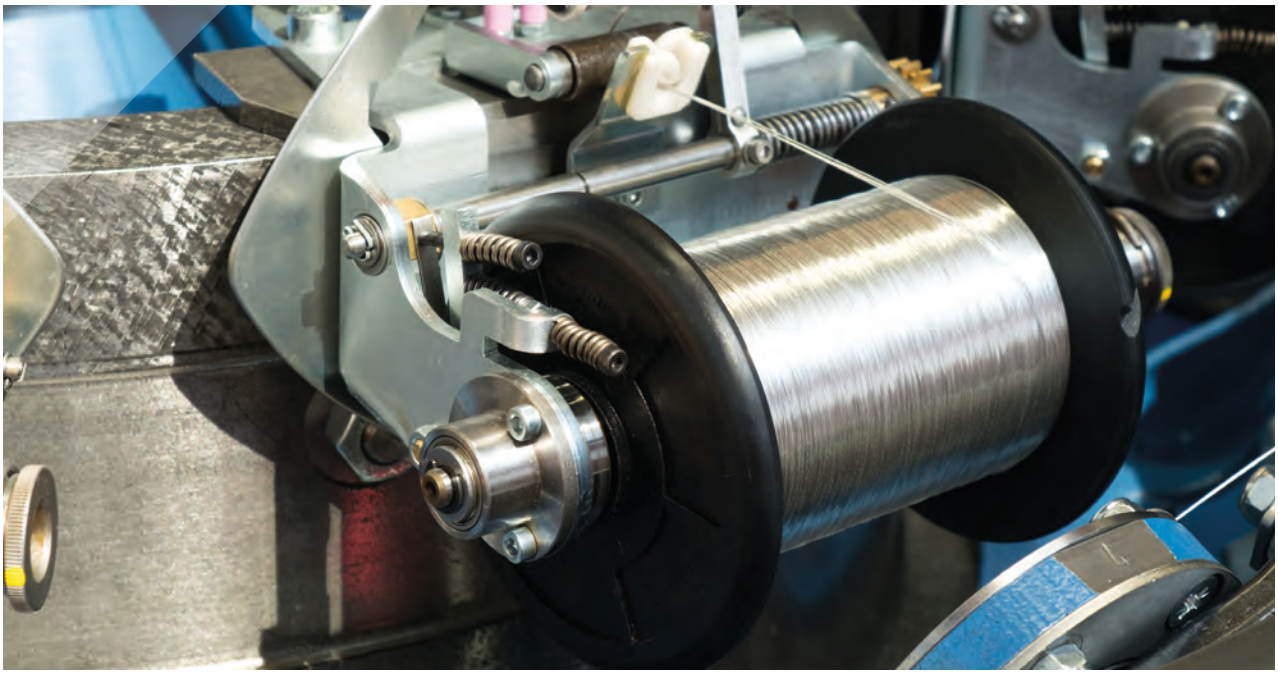
Durant toute cette action, Martha et Rodrigue se sont-ils retrouvés côte à côte sur une même marche ? Si oui, combien de fois ? Sur quelle marche et à quel moment chaque fois ?

Justifiez votre réponse à l'aide de représentations appropriées.

© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 262

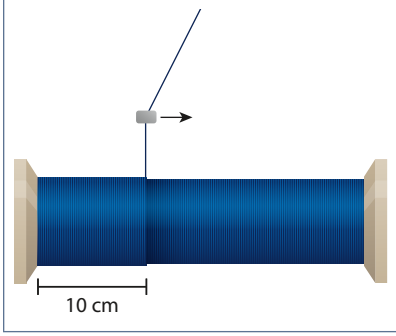
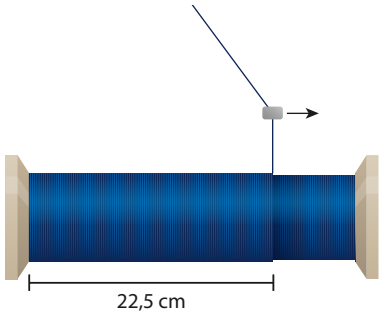
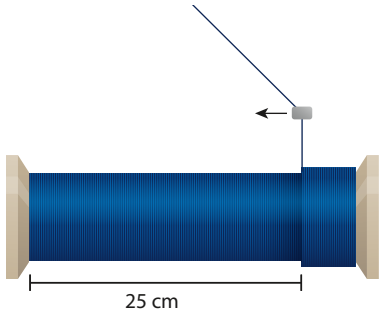
SAÉ



Un embobinage automatique

Une machine a été programmée pour enrouler un fil sur une bobine. Un bras métallique déplace le fil d'un bout à l'autre de la bobine pendant que celle-ci tourne sur elle-même. Le bras se déplace à vitesse constante. Aussitôt qu'il arrive au bout de la bobine, il revient dans l'autre sens, à la même vitesse.

Les trois images suivantes montrent la position du fil qui s'enroule à trois instants d'un cycle aller-retour.

Au début de l'observation	Après 1,5 s	Après 3 s
		

On observe la machine fonctionner ainsi pendant 30 s exactement.

TÂCHE

Vous devez déterminer à quelle position le fil qui s'enroule se trouvera à la fin de l'observation.

© SOFAD – Reproduction interdite.

CORRIGÉ PAGE 263

Résolution

Réponse : _____

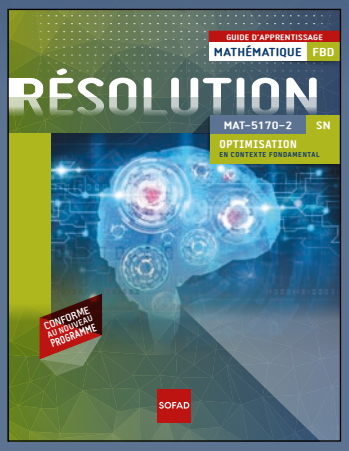
	Évaluation par critère				
Cr. 1.1	A	B	C	D	E
Cr. 1.2	A	B	C	D	E
Cr. 2.1	A	B	C	D	E
Cr. 2.2	A	B	C	D	E
Cr. 2.3	A	B	C	D	E

CORRIGÉ PAGE 263

© SOFAD – Reproduction interdite.

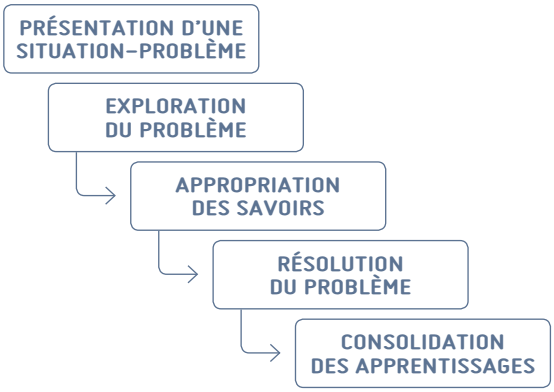
RÉSOLUTION

La collection **RÉSOLUTION** couvre l'ensemble des cours du programme de formation de base commune et diversifiée, dont les séquences *Culture, société et technique* (CST) et *Sciences naturelles* (SN) de 5e secondaire.



SOFAD

RÉSOLUTION propose une démarche d'apprentissage basée sur l'acquisition de tous les savoirs mathématiques prescrits en contexte de résolution de problèmes. La séquence d'apprentissages qui soutient cette approche est la suivante :



Le questionnement, à la fois inductif et déductif, donne un sens aux savoirs et aux stratégies à acquérir. Les guides d'apprentissage offrent une multitude d'exercices simples et de tâches plus complexes en réponse aux besoins exprimés par les apprenants et les enseignants. Des ressources supplémentaires sont aussi offertes sur portailsofad.com.

Composantes de la collection RÉSOLUTION :

- Guide d'apprentissage : version imprimée et PDF ;
- Guide synthèse d'enseignement (PDF) ;
- Capsules vidéo des situations-problèmes ;
- Activités TIC : GeoGebra, calculatrice à affichage graphique ;
- Activités notées ;
- Corrigés.

ISBN 978-2-89493-932-1

Imprimé au Québec 8529-01