ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS I

MAT-2006-2

sofad

MAT-2006-2

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS I

sofad

Rédactrice : Marie-Reine Rouillard

Réviseurs du contenu : Jean-Paul Groleau
Daniel Gélineau
Mireille Moisan-Sanscartier

Mise à jour : Mireille Moisan-Sanscartier

Réviseures linguistiques : Marie Rose Vianna
Francine Cardinal

Consultant en andragogie : Serge Vallières

Coordonnateur pour la DGRDFD : Jean-Paul Groleau

Coordonnateur pour la DFGA : Ronald Côté

Photocomposition et montage : Multitexte Plus

Édition électronique de la mise à jour : L'atelier du Mac inc.

Réimpression : 2006

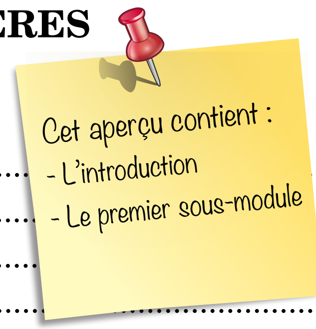
Dépôt légal — 1997

Bibliothèque et Archives nationales du Québec

Bibliothèque et Archives Canada

ISBN 978-2-89493-082-3

TABLE DES MATIÈRES



SOUS-MODULES

PRÉSENTATION DE L'ORDINOGRAMME

BIENVENUE AU ROYAUME DES MATHÉMATIQUES!

Ce programme de mathématiques a été élaboré pour la clientèle adulte des Services d'éducation des adultes des commissions scolaires et de la formation à distance. Les activités d'apprentissage qu'il contient ont été conçues pour être réalisées en apprentissage individualisé. Toutefois, si vous éprouvez des difficultés, n'hésitez pas à consulter votre formatrice ou votre formateur ou à téléphoner à la personne-ressource qui vous a été assignée. Le tableau qui suit situe dans le programme le module que vous avez entre les mains. Il vous permet de visualiser le chemin parcouru ou qui vous reste à parcourir selon l'objectif professionnel que vous poursuivez. Suivant les exigences de votre objectif professionnel, plusieurs voies de sortie du royaume des mathématiques sont prévues.

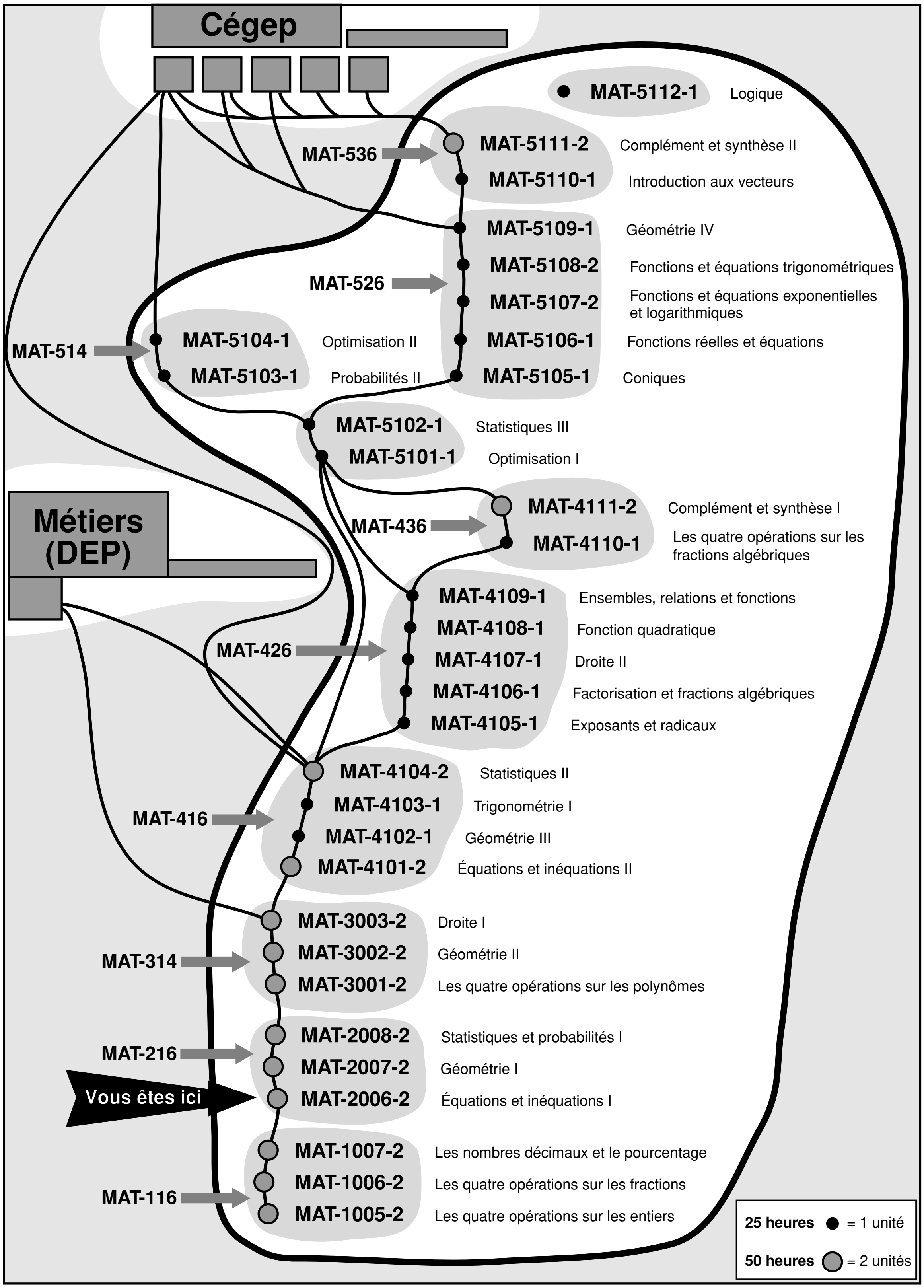
Les premières voies, les routes MAT-3003-2 (MAT-314) et MAT-4104-2 (MAT-416), vous permettent d'entreprendre des études menant à un diplôme d'études professionnelles (DEP) et certains programmes de niveau collégial (cégep) pour la route MAT-4104-2.

Les routes MAT-4109-1 (MAT-426), MAT-4111-2 (MAT-436) et MAT-5104-1 (MAT-514), vous permettent d'obtenir un diplôme d'études secondaires (DES) qui donne accès à certains programmes d'études collégiales (cégep) n'exigeant pas de compétences particulières en mathématiques avancées.

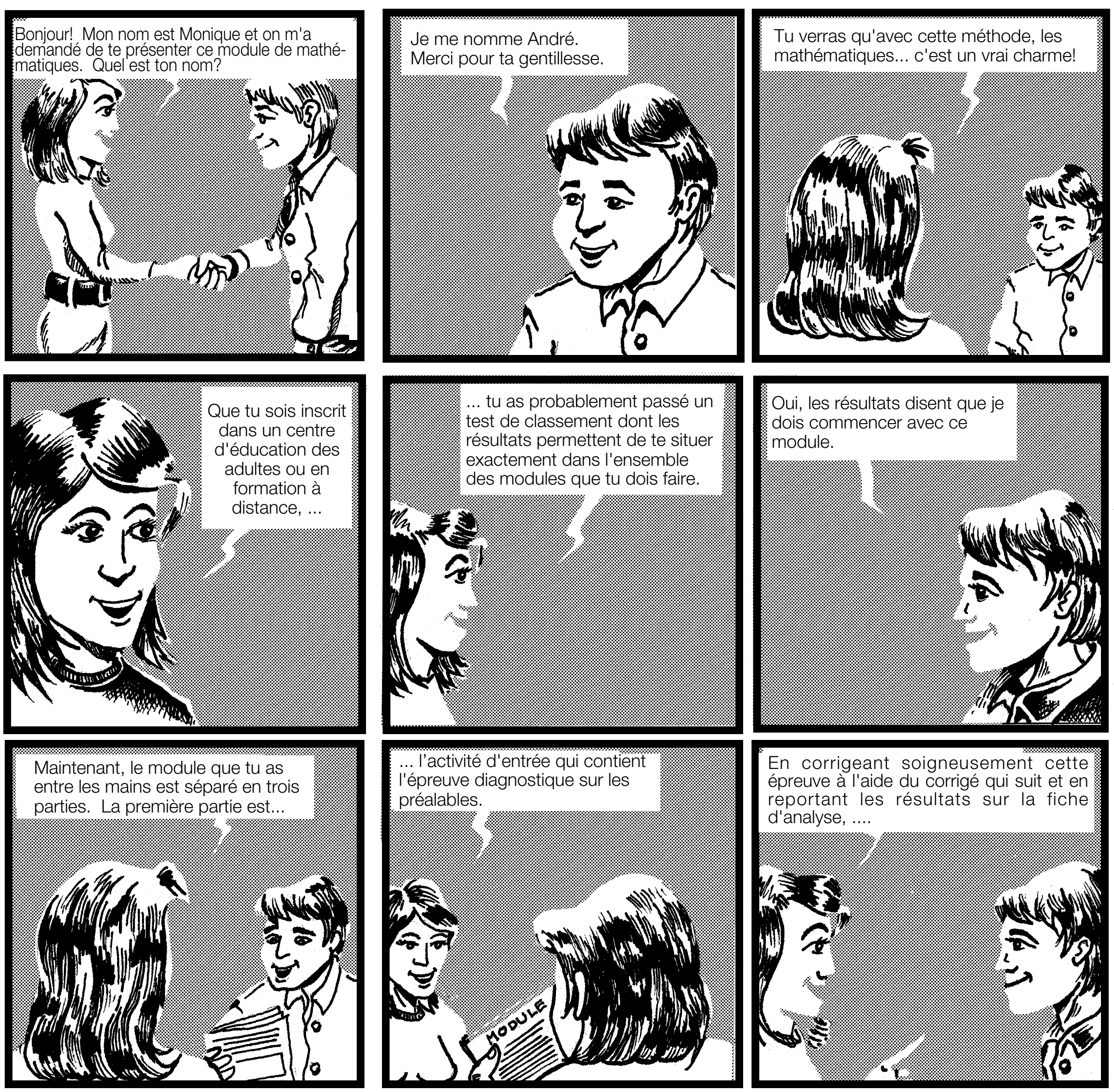
Finalement, les routes MAT-5109-1 (MAT-526) et MAT-5111-2 (MAT-536) vous permettent d'accéder au niveau collégial (cégep) dans des programmes qui exigent de solides connaissances en mathématiques et où d'autres défis vous attendent. Bonne route!

S'il s'agit de votre premier contact avec ce programme de mathématiques, après avoir examiné l'ordinogramme du programme, lisez la section intitulée « Comment utiliser ce guide »; sinon, passez directement à la section intitulée « Introduction générale ». Bon travail!

ORDINOGRAMME DU PROGRAMME



COMMENT UTILISER CE GUIDE?



DÉPART

La ligne de départ montre le **début** de l'apprentissage.

Le petit point d'interrogation blanc identifie les **questions** dont les réponses sont à l'intérieur du texte.

La cible signale l'**objectif** à atteindre.

rappel

Le bloc-notes indique un **rappel** des notions que tu as étudiées auparavant.

Le point d'interrogation en gras identifie les **exercices** de consolidation qui te permettront de mettre en pratique ce que tu viens d'apprendre.

La **calculatrice** te rappelle à quel moment t'en servir.

La gerbe de blé identifie une **synthèse** qui te permet de faire le point sur ce que tu viens d'apprendre. Ce logo répété plusieurs fois signifie que tu approches de la fin du module. C'est la synthèse finale qui te permet de faire le lien entre tous les apprentissages du module.

ARRIVÉE

Finalement, la ligne d'arrivée indique qu'il est temps de passer à l'**autoévaluation** pour vérifier si tu as bien assimilé les apprentissages réalisés.


Il y a aussi beaucoup de choses amusantes dans ce module. Par exemple, lorsque tu vois la figure d'un sage, c'est un «Saviez-vous que...?».
«Saviez-vous que...?»
Oui, par exemple, de petites notes sur l'histoire des mathématiques, des jeux amusants. C'est intéressant et cela te calme en même temps.
Dois-je mémoriser ce que dit le sage?
Non, cela ne fait pas partie de l'apprentissage; c'est un peu comme un moment de détente.
C'est la même chose pour «La page des mathophiles» qui signifie : qui aiment les mathématiques.
C'est tellement stimulant que, même si tu n'es pas obligé de la travailler, tu as envie de la faire.
Et puis, tout au long du module, les auteurs se sont arrangés pour te faciliter la tâche...
... ainsi, les mots en italiques gras apparaissent dans le glossaire à la fin du module...
PARFAIT!
... les passages encadrés t'indiquent qu'il s'agit de points à retenir comme des définitions, des formules, des règles, etc. Je te le dis, c'est plus facile.
Enfin, la troisième partie contient la synthèse finale qui vient faire le lien entre les différentes parties du module.
De plus, tu y trouveras une épreuve d'autoévaluation ainsi que son corrigé. Tu sauras à ce moment-là si tu es prêt pour l'examen final.
Merci, Monique, tu m'as rendu un grand service.
Tout le plaisir est pour moi.
Maintenant, je me sauve. Au revoir!
Plus tard...
C'est fantastique! Je n'aurais jamais cru aimer les mathématiques autant que ça.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

À LA DÉCOUVERTE DE L'ALGÈBRE

Bienvenue au pays de l'algèbre! Dans ce module, vous prendrez contact avec une branche des mathématiques que nous nommons l'algèbre. C'est une contrée hospitalière, il suffit de bien l'apprivoiser.

Depuis l'époque des pharaons, en passant par les Grecs, les hommes s'efforcent de résoudre des problèmes comportant un nombre inconnu. Dans l'algèbre moderne, nous représentons ce nombre par des symboles et plus particulièrement par des lettres. Ces symboles mathématiques à valeurs multiples sont appelés «variables».

Les variables servent à former des expressions algébriques. Les expressions algébriques se lisent ainsi : $2x$, y, $3x + y$,... Vous aurez dans ce module à additionner et à soustraire des expressions algébriques ainsi qu'à les multiplier par un nombre. L'addition et la soustraction ne s'effectuent qu'entre des termes semblables, c'est-à-dire ceux qui contiennent les mêmes variables.

À partir d'expressions algébriques reliées par un signe d'égalité, nous obtenons des équations à une variable, c'est-à-dire des équations se ramenant à la forme $ax + b = 0$. $3x + 8 = 20$; $2x - 4 = x + 5$ sont des équations de la forme $ax + b = 0$. Nous devrons apprendre à résoudre ces équations.

Résoudre une équation signifie déterminer la valeur numérique de la variable. Pour ce faire, nous devons grouper les termes contenant une variable d'un même côté de l'équation, simplifier par différentes opérations arithmétiques et obtenir ainsi la valeur numérique de la variable. Les équations pourront se présenter sous forme de rapports $\left(\frac{x}{2} = \frac{8}{12}\right)$ ou de formules. En remplaçant certaines variables d'une formule par leur valeur numérique, nous pouvons former une équation et trouver la valeur inconnue.

L'algèbre nous aidera également à résoudre des problèmes concrets. Nous devrons alors choisir une variable, bâtir une équation autour d'elle, la résoudre et trouver ainsi la solution à un problème pratique. Comme dans tous les autres cas, nous devrons vérifier ensuite la validité de cette solution.

Dans ce module, nous aurons aussi à résoudre des inéquations. Les inéquations sont des expressions algébriques reliées par les symboles de comparaison ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$). La résolution d'inéquations s'effectue de la même manière que la résolution d'équations. Finalement, nous aurons à situer la solution des inéquations sur une droite numérique.

Comme vous le constatez, nous entrons dans un nouveau domaine. Il est donc important de bien l'assimiler pour établir des bases solides. Ce monde peut être fascinant. L'algèbre est très utile que ce soit pour convertir une recette, appliquer une formule ou s'amuser à résoudre des jeux mathématiques.

Bonne exploration dans l'univers de l'algèbre!

OBJECTIFS INTERMÉDIAIRES ET TERMINAUX DU MODULE

Le module MAT-2006-2 (GSM*-121) comporte sept objectifs et prévoit une durée d'apprentissage de cinquante heures réparties comme dans le tableau ci-dessous. Les objectifs terminaux sont en caractères gras.

Objectifs	Nombres d'heures**	% (évaluation)
GSM-121-01 à **GSM-121-03**	10	20 %
GSM-121-04	10	20 %
GSM-121-05	9	20 %
GSM-121-06	9	20 %
GSM-121-07	10	20 %

* GSM signifie «Général, Secondaire, Mathématiques».

** Deux heures sont réservées à l'évaluation finale.

GSM-121-01 Somme et différence d'expressions algébriques

Transformer une expression algébrique renfermant des termes semblables reliés entre eux par les opérations d'addition ou de soustraction en une expression algébrique réduite à sa plus simple expression. L'expression algébrique initiale renferme au plus cinq termes contenant au plus trois variables du premier degré. Elle ne contient ni parenthèses, ni crochets, ni accolades.

GSM-121-02 Distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction

Appliquer la propriété de la distributivité de la multiplication sur l'addition et sur la soustraction à une expression algébrique de la forme $a(bx + cy)$ où a, b et c sont des nombres rationnels, tandis que x et y sont des variables. L'expression algébrique initiale renferme au maximum quatre termes.

GSM-121-03 Résolution d'équations du premier degré à une variable

Résoudre une équation du premier degré à une variable pouvant se ramener à la forme $ax + b = 0$, où a et b sont des nombres rationnels ($a \neq 0$) et où x représente la variable. L'équation initiale renferme au maximum six termes et elle est définie dans un référentiel donné ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$). La solution doit être accompagnée des étapes de résolution de l'équation.

GSM-121-04 Résolution d'inéquations du premier degré à une variable

Résoudre une inéquation du premier degré à une variable convertible en l'une ou l'autre des formes suivantes :

- $ax + b \geq 0$
- $ax + b \leq 0$
- $ax + b > 0$
- $ax + b < 0$

Les constantes *a* et *b* sont des nombres rationnels ($a \neq 0$), tandis que la variable est représentée par *x*. L'inéquation initiale renferme au maximum six termes et elle est définie dans un référentiel donné ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$). La solution de l'inéquation doit être accompagnée de sa représentation sur la droite numérique ainsi que des étapes de résolution de l'inéquation.

GSM-121-05 Rapports et proportions

Résoudre une équation du premier degré à une variable se présentant sous la forme d'une proportion, en appliquant la propriété fondamentale des proportions : le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. Les situations sont présentées sous forme d'expressions mathématiques renfermant au maximum six termes ou sous forme de textes décrivant des situations empruntées à la vie courante. La solution doit être accompagnée des étapes de résolution de l'équation.

GSM-121-06 Formules

Résoudre une équation représentant une formule scientifique quelconque et qui peut se ramener à une équation renfermant une variable inconnue. La formule est fournie ainsi que la valeur des autres variables. La solution doit être accompagnée des étapes de résolution de l'équation.

GSM-121-07 Problèmes sur les équations du premier degré à une variable

Résoudre un problème à données textuelles convertible en une équation du premier degré à une variable. Le problème renferme au maximum trois valeurs recherchées. La solution du problème doit être accompagnée des étapes de sa résolution.

ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE SUR LES PRÉALABLES

Consignes

1° Répondez autant que possible à toutes les questions.

2° N'utilisez pas de calculatrice.

3° Inscrivez vos réponses directement sur la feuille.

4° Ne perdez pas de temps. Si vous ne pouvez répondre à une question, passez immédiatement à la suivante.

5° Dès que vous aurez répondu à toutes les questions auxquelles il vous est possible de répondre, corrigez vos réponses à l'aide du corrigé qui suit l'épreuve diagnostique.

6° Vos réponses devront être exactes pour être acceptées comme correctes. De plus, les différentes étapes de la résolution devront être équivalentes à celles qui sont suggérées.

7° Transcrivez vos résultats sur la fiche d'analyse des résultats de l'épreuve diagnostique qui suit le corrigé.

8° Prenez connaissance des activités de révision proposées pour chacune des réponses incorrectes.

9° Si toutes vos réponses sont exactes, vous possédez les préalables nécessaires pour entreprendre l'étude de ce module.

1. Simplifiez les fractions suivantes.

a) $\frac{18}{24}$ = b) $\frac{15}{25}$ =

2. Calculez la somme des nombres suivants.

a) 7,24 + 0,04 = b) $\frac{2}{5} + \frac{1}{2}$ =

3. Calculez la différence entre les nombres suivants.

a) $-7 - (-10) =$ b) $25 - 6{,}28 =$

4. Calculez le produit des nombres suivants.

a) $-1{,}2 \times 2{,}32 =$ b) $\frac{3}{4} \times 8$ =

5. Calculez le quotient des nombres suivants.

a) $1{,}84 \div 2{,}3 =$ b) $7 \div \frac{1}{2}$ =

6. Tracez deux droites numériques et situez les nombres suivants sur ces droites.

   N.B. – La distance entre deux nombres entiers consécutifs doit être de 1 cm.

   a) $3; -2; \frac{1}{2}; -\frac{3}{4}$

   b) -1; 0,4; 3,2; 2

7. Comparez les nombres suivants à l'aide des symboles <, > ou =.

   a) $-4 \quad -2$ b) 1,4   0,5   c) $\frac{3}{2} \quad \frac{3}{4}$

8. Arrondissez les nombres suivants au centième près.

   a) 24,372 : ....   b) 378,426 1 : ....

9. Traduisez les énoncés suivants sous forme de rapports.

   a) Dans la classe de Roula, seize enfants parmi les trente-trois élèves sont d'origine canadienne.

   ....

   b) Paul a réussi huit questions sur dix à son examen de mathématiques.

   ....

10. Marc, employé au supermarché *Les Bons Aliments*, travaille cinq jours par semaine. Il est manutentionnaire et il place les aliments sur les étagères avant l'ouverture du magasin. Il a la responsabilité de 5 sections et son salaire hebdomadaire est de 280 $ après impôts et assurances. Il dépense le quart de son salaire pour son loyer et les $\frac{2}{3}$ pour d'autres dépenses. S'il travaille 48 semaines par année, quelle somme peut-il économiser en un an? Décrivez les étapes de la solution et donnez la réponse.

11. Un coureur a fait 4 fois le tour d'une piste : la première fois en 3,82 minutes, la deuxième fois en 3,5 minutes, la troisième fois en 3,94 minutes et la quatrième fois en 3,39 minutes. Combien de temps en moyenne a-t-il pris pour faire un tour?
Décrivez les étapes de la solution et donnez la réponse.
N.B. – La moyenne s'obtient en divisant la somme des quantités données par le nombre de fois où ces quantités apparaissent.

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE SUR LES PRÉALABLES

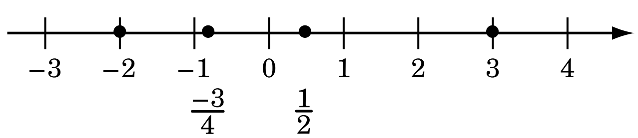
1. a) $\dfrac{18 \div 6}{24 \div 6} = \dfrac{3}{4}$ b) $\dfrac{15 \div 5}{25 \div 5} = \dfrac{3}{5}$

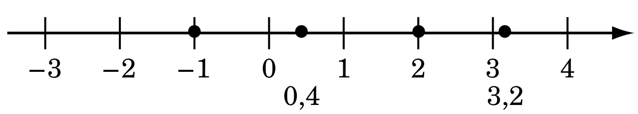
2. a) $7{,}24 + 0{,}04 = 7{,}28$ b) $\dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{10} + \dfrac{5}{10} = \dfrac{9}{10}$

3. a) $-7 - (-10) = -7 + 10 = 3$ b) $25{,}00 - 6{,}28 = 18{,}72$

4. a) $-1{,}2 \times 2{,}32 = -2{,}784$ b) $\dfrac{3}{\cancel{4}_{1}} \times \dfrac{\cancel{8}^{2}}{1} = \dfrac{6}{1} = 6$

5. a) $1{,}84 \div 2{,}3 = 0{,}8$ b) $7 \div \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{1} \times \dfrac{2}{1} = \dfrac{14}{1} = 14$

6. a) 

b) 

7. a) $-4 < -2$ b) $1{,}4 > 0{,}5$ c) $\dfrac{3}{2} > \dfrac{3}{4}$

8. a) 24,37 b) 378,43

9. a) $\frac{16}{33}$ b) $\frac{8}{10}$ ou $\frac{4}{5}$

10. • Nous voulons déterminer les économies faites par Marc en 48 semaines.

• Mathématisation

$$\left[280\ \$ - \left(\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) \times 280\ \$\right)\right] \times 48 \text{ semaines}$$

• Estimation

$$\left[300\ \$ - \left(\left(\frac{2}{10} + \frac{7}{10}\right) \times 300\ \$\right)\right] \times 50$$

$$\left[300\ \$ - \left(\frac{9}{10} \times 300\ \$\right)\right] \times 50$$

$[300\ \$ - 270\ \$] \times 50 = 30\ \$ \times 50 = 1\ 500\ \$$

• Résolution

$$\left[280\ \$ - \left(\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) \times 280\ \$\right)\right] \times 48$$

$$\left[280\ \$ - \left(\frac{3}{12} + \frac{8}{12}\right) \times 280\ \$\right] \times 48$$

$$\left[280\ \$ - \left(\frac{11}{12} \times \frac{280}{1}\right)\right] \times 48$$

$$\left[280\ \$ - \frac{3\ 080\ \$}{12}\right] \times 48$$

$[280\ \$ - 256{,}67\ \$] \times 48 = 23{,}33\ \$ \times 48 = 1\ 119{,}84\ \$$

- Le résultat se rapprochant de l'estimation, nous pouvons considérer la réponse comme vraisemblable.

- Marc économise 1 119,84 $ par année.

11.
- Nous cherchons à déterminer le temps moyen pris pour faire un tour de piste.

- Mathématisation

$$\frac{3{,}82 \text{ min} + 3{,}5 \text{ min} + 3{,}94 \text{ min} + 3{,}39 \text{ min}}{4}$$

- Estimation

$$\frac{4 \text{ min} + 4 \text{ min} + 4 \text{ min} + 3 \text{ min}}{4} = \frac{15 \text{ min}}{4} = \frac{16 \text{ min}}{4} = 4 \text{ min environ}$$

- Résolution

$$\frac{3{,}82 \text{ min} + 3{,}5 \text{ min} + 3{,}94 \text{ min} + 3{,}39 \text{ min}}{4}$$

$$\frac{14{,}65 \text{ min}}{4} = 3{,}66 \text{ min, arrondi au centième près.}$$

- Le résultat se rapprochant de l'estimation, nous pouvons considérer la réponse comme vraisemblable.

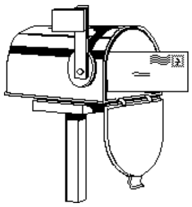
- Le temps moyen pour un tour de piste est de 3,66 min.

ANALYSE DES RÉSULTATS DE L'ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE

Questions	Réponses		Révision		À faire avant
	Correctes	Incorrectes	Section	Page	
1. a)			9.2	9.19	Sous-module 1
b)			9.2	9.19	Sous-module 1
2. a)			9.3	9.23	Sous-module 1
b)			9.3	9.23	Sous-module 1
3. a)			9.4	9.28	Sous-module 1
b)			9.4	9.28	Sous-module 1
4. a)			9.5	9.34	Sous-module 2
b)			9.5	9.34	Sous-module 2
5. a)			9.6	9.39	Sous-module 3
b)			9.6	9.39	Sous-module 3
6. a)			9.7	9.44	Sous-module 3
b)			9.7	9.44	Sous-module 3
7. a)			9.8	9.50	Sous-module 3
b)			9.8	9.50	Sous-module 3
c)			9.8	9.50	Sous-module 3
8. a)			9.9	9.52	Sous-module 3
b)			9.9	9.52	Sous-module 3
9. a)			9.10	9.55	Sous-module 5
b)			9.10	9.55	Sous-module 5
10.			9.1	9.4	Sous-modules 1 et 7
11.			9.1	9.4	Sous-modules 1 et 7

- Si toutes vos réponses sont **correctes**, vous possédez les préalables nécessaires pour entreprendre l'étude de ce module.

- Pour chaque réponse **incorrecte**, référez-vous aux activités suggérées dans la colonne «**Révision**». Effectuez les activités de révision avant d'entreprendre l'étude de chaque sous-module proposée dans la colonne de droite «**À faire avant**».



SUIVEZ-VOUS CE COURS EN FORMATION À DISTANCE ?

Vous avez présentement entre les mains le matériel didactique du cours MAT-2006-2 ainsi que les devoirs qui s'y rattachent. À ce matériel est jointe une lettre de votre tutrice ou de votre tuteur. Cette lettre vous indique les différents canaux par lesquels vous pourrez communiquer avec elle ou lui (lettre, téléphone, etc.) ainsi que les heures réservées à ces prises de contact. En plus de corriger vos travaux, la tutrice ou le tuteur est la personne-ressource qui vous aidera dans votre apprentissage. Donc, n'hésitez pas à faire appel à ses services si vous éprouvez quelque difficulté.

UNE MÉTHODE GÉNÉRALE DE TRAVAIL

L'enseignement à distance est un processus d'apprentissage d'une grande souplesse, mais il exige de votre part un engagement actif. Il requiert en effet de la régularité dans l'étude et un effort soutenu. Une méthode efficace de travail vous facilitera la tâche. Un cheminement d'apprentissage constant et productif ne peut échapper aux règles suivantes.

- Fixez-vous un horaire qui vous permet d'étudier selon vos possibilités tout en tenant compte de vos loisirs et de vos activités.

- Astreignez-vous à une étude régulière et assidue.

Pour vous aider à réussir ce cours de mathématiques, voici quelques règles à suivre concernant la théorie, les exemples, les exercices et les devoirs.

La théorie

Pour assimiler correctement les notions théoriques, portez attention aux points suivants.

1° Lisez attentivement le texte et soulignez les points importants.

2° Mémorisez les définitions, les formules et les marches à suivre pour résoudre un problème donné; cela facilitera la compréhension du texte.

3° Notez, à la fin du devoir, les points que vous ne comprenez pas. Votre tutrice ou votre tuteur vous donnera alors des explications pertinentes.

4° Essayez de poursuivre votre étude même si vous butez sur un obstacle particulier. Cependant, si une difficulté importante vous empêche de poursuivre la démarche d'apprentissage, n'attendez pas d'envoyer votre devoir pour demander des explications : adressez-vous à la tutrice ou au tuteur selon les modalités prévues dans sa lettre.

Les exemples

Les exemples sont des applications de la théorie. Ils illustrent le cheminement à suivre pour résoudre les exercices. Aussi, étudiez attentivement les solutions proposées dans les exemples et refaites-les pour vous-même avant d'entreprendre les exercices.

Les exercices

Les exercices d'un sous-module respectent généralement le modèle des exemples donnés. Voici quelques suggestions pour réussir ces exercices.

1° Rédigez les solutions en prenant pour modèle les exemples présentés dans le texte. Il est important de ne pas consulter le corrigé qui se trouve à la fin du texte sur des feuilles de couleur avant d'avoir terminé les exercices.

2° Évaluez vos solutions à l'aide du corrigé uniquement après avoir fait tous les exercices. **Attention!** Vérifiez attentivement les étapes de votre solution, même si votre réponse est exacte.

3° Si vous relevez une erreur dans votre réponse ou votre solution, revoyez les notions que vous n'avez pas comprises ainsi que les exemples qui s'y rattachent. Ensuite, recommencez l'exercice.

4° Assurez-vous d'avoir réussi tous les exercices d'un sous-module avant de passer au suivant.

Les devoirs

Le cours MAT-2006-2 comprend trois devoirs. La première page de chaque devoir indique à quels sous-modules se rapportent les questions posées. Les devoirs servent à évaluer votre degré de compréhension de la matière étudiée. Ils sont également un moyen de communication avec votre tutrice ou votre tuteur.

Quand vous aurez assimilé la matière et réussi les exercices qui s'y rattachent, rédigez sans délai le devoir correspondant.

1° Faites d'abord un brouillon. Apportez à vos solutions toutes les modifications nécessaires avant de mettre au propre la réponse finale.

2° Transcrivez au crayon à mine, de préférence, les réponses ou les solutions dans les espaces en blanc du document à retourner.

3° Accompagnez chaque réponse d'une solution claire et détaillée s'il s'agit d'une question qui exige un développement.

4° Ne postez que un devoir à la fois; nous vous le retournerons après correction.

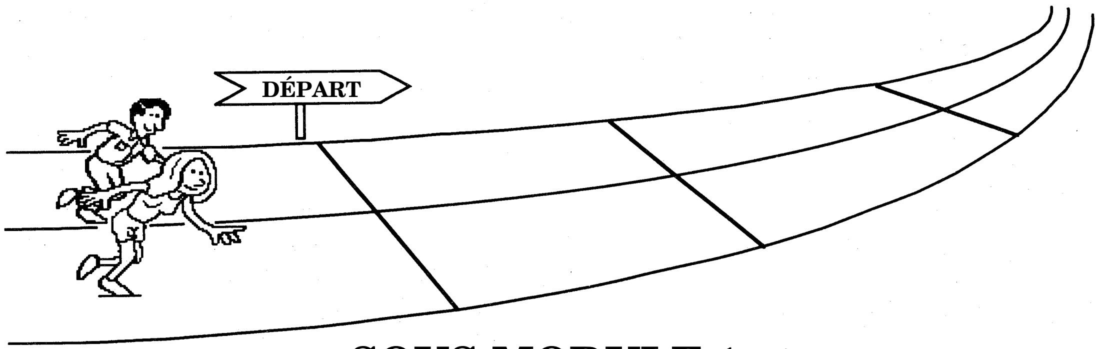
Écrivez, dans la section «Questions de l'élève», les questions que vous désirez poser à la tutrice ou au tuteur. Cette dernière ou ce dernier vous prodiguera des conseils. Elle ou il pourra vous guider dans vos études et vous orienter, si nécessaire.

Dans ce cours

Le devoir 1 porte sur les sous-modules 1 à 3.
Le devoir 2 porte sur les sous-module 4 à 7.
Le devoir 3 porte sur les sous-modules 1 à 7.

SANCTION

Lorsque vous aurez complété tous les travaux et si vous avez maintenu une moyenne d'au moins 60 %, vous serez autorisé à passer l'examen.



SOUS-MODULE 1

SOMME ET DIFFÉRENCE D'EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES

1.1 ACTIVITÉ D'ACQUISITION

Le débit et le crédit

M. Lachance consulte son carnet de caisse. Il y voit trois colonnes : la colonne du débit lui indique les retraits; celle du crédit, les montants déposés et, enfin, une colonne indique le solde.

DATE	DÉBIT	CRÉDIT	SOLDE

Fig. 1.1 Page d'un carnet de caisse

Comme M. Lachance ne dépose pas ou ne retire pas toujours le même montant dans son compte, les quantités inscrites dans les colonnes de débit et de crédit varient et font varier le solde. Puisque ces montants ne sont pas fixes, nous les représenterons par des symboles. Un symbole correspond par convention à une chose, à une notion ou à une opération qu'il désigne. Les opérations mathématiques sont représentées par des symboles (+, –, ×, ÷). Le drapeau à fleur de lys est le symbole du Québec. Dans ce sous-module, vous verrez l'utilisation de symboles destinés à représenter des quantités qui peuvent varier.

Pour atteindre l'objectif de ce sous-module, vous devrez être capable de calculer la *somme* ou la *différence* de termes semblables dans une *expression algébrique*, c'est-à-dire un ensemble de lettres et de nombres regroupés par les symboles d'addition, de soustraction, de multiplication et de division.

Les symboles utilisés pour remplacer les dépôts et les retraits sont appelés ***variables***.

> Une **variable** est un symbole qui peut prendre plusieurs valeurs.

En algèbre, les variables sont habituellement représentées par des lettres et particulièrement par x, y et z, mais toutes les lettres peuvent servir de symboles pour les variables.

Représentons les dépôts de M. Lachance par x et ses retraits par y; le solde de son compte deviendra $x - y$, c'est-à-dire les dépôts moins les retraits.

La variable est utile en plusieurs domaines ou contextes. Par exemple, le taux de consommation d'essence d'une voiture dépend de plusieurs facteurs : la vitesse de croisière, les départs et arrêts brusques, l'état d'encrassement des bougies, etc. Vitesse de croisière, départs et arrêts brusques, encrassement des bougies sont ici des variables dont dépend le taux de consommation de la voiture.

Les variables peuvent être multipliées par des nombres. Ainsi, M. Lachance effectue 12 retraits de même montant au cours d'un an. Ces retraits correspondent au paiement de son loyer mensuel. Au cours des années, ces montants ont varié; si nous représentons le loyer mensuel par la variable z, nous pouvons dire que le loyer annuel de M. Lachance est de $12z$. Si le loyer mensuel est de 350 \$, le loyer annuel sera de 12×350 \$. Si le loyer mensuel est de 400 \$, il sera en un an de 12×400 \$ et ainsi de suite.

Dans l'expression $12z$, nous donnerons au nombre 12 le nom de ***coefficient numérique***.

> Le **coefficient numérique** est un nombre situé à gauche des variables et qui multiplie ces variables.

Ainsi, dans $-4xy$, le coefficient numérique est -4; dans $\frac{2}{3}xyz$, il est $\frac{2}{3}$.

Notons l'omission du signe $\times$ entre le coefficient numérique et entre les variables. Ce signe est alors sous-entendu.

Ainsi, $-4xy$ doit se lire $-4 \times x \times y$ et $\frac{2}{3}xyz$ doit se lire $\frac{2}{3} \times x \times y \times z$.

N.B. – Lorsque le coefficient numérique est 1, nous ne l'écrivons pas. Ainsi, $1x$ devient x.

Voyons si vous avez saisi!

Exercice 1.1

Identifiez le coefficient numérique de chacune des expressions suivantes.

1. $-2x$ ....
2. $3y$ ....
3. $\frac{1}{4}xy$ ....
4. $-xy$ ....
5. ab ....
6. $0{,}6z$ ....
7. $\frac{-y}{2}$ ....
8. $7d$ ....

Vous remarquez qu'au numéro 5, il n'y a pas de nombre devant les variables ab et qu'au numéro 4, il n'y a que le signe – devant les variables xy. Au numéro 5, nous aurions pu écrire $1ab$ et le coefficient numérique est 1; au numéro 4, nous aurions pu écrire $-1xy$ et le coefficient numérique est –1. Au numéro 7, nous retrouvons $-y$ au numérateur de la fraction : nous avons encore une fois –1 qui est sous-entendu et nous aurions pu écrire $\frac{-1y}{2}$ ou $\frac{-1y}{2}y$. Le coefficient numérique est alors $-\frac{1}{2}$.

Revenons au livret de caisse de M. Lachance. Le dernier solde indique 500 $; si un nouveau montant est déposé, le nouveau solde sera de 500 $ + x. Ce nouveau solde est représenté par une **expression algébrique**.

> Une **expression algébrique** est un ensemble de nombres et de lettres réunis par les signes d'addition, de soustraction, de multiplication ou de division.

Une expression algébrique peut être composée d'un ***terme*** comme $12y$ ou de plusieurs **termes** comme 500 $ + x ou $2x + y + 3$.

> Un **terme** est une expression algébrique dont les parties (le coefficient numérique et les variables) sont reliées entre elles uniquement par les signes de la multiplication ou de la division.

Exemple 1

$2x$, $3xy$, $4yz$, $\frac{2}{3}xy$ et 3 sont des expressions algébriques composées de un seul terme.
$2x + 3$ et $5xy + y$ sont des expressions algébriques composées de 2 termes.
$2xy + 3xyz + xz$ est une expression algébrique composée de 3 termes.

Dans toute expression algébrique, le terme qui n'est pas accompagné de une ou de plusieurs variables est appelé ***terme constant***. Ainsi, dans l'expression algébrique $2x + 3$, 3 est le terme constant.

Si nous examinons la liste des expressions algébriques composées de un seul terme dans l'exemple 1, nous remarquons que deux termes ont les mêmes variables. $3xy$ et $\frac{2}{3}xy$ sont appelés deux ***termes semblables***.

Les **termes semblables** sont des termes formés des mêmes variables mais qui n'ont pas nécessairement les mêmes coefficients numériques ni les mêmes signes.

Ainsi, $2xy$, $\frac{1}{3}xy$ et xy sont des termes semblables.

N.B. – xy et yx sont des termes semblables, car $x \times y = y \times x$. Il est toutefois préférable de les placer par ordre alphabétique.

À vous de jouer maintenant!

Exercice 1.2

Identifiez les termes semblables dans les listes de termes qui suivent.

1. $3xy$; $4xz$; $5y$; $\frac{2}{3}xz$; $6xz$ ....

2. $0{,}2bc$; $0{,}3cd$; $-bc$; $\frac{bc}{4}$ ....

3. $7d$; $8cd$; $0{,}5cd$; $-3c$; $4cd$ ....

4. $3ab$; $-4a$; $-6b$; a ....

Tania regarde un grand panier plein de fruits : les pommes, les oranges et les bananes y sont mélangées. Elle se demande comment procéder pour compter chaque catégorie de fruits. Nathalie arrive et lui conseille de commencer par grouper les fruits selon leur variété et de compter ensuite les fruits de chaque groupe. Nous n'additionnons pas des oranges avec des pommes; c'est la même chose pour une expression algébrique, nous ne pouvons pas additionner des termes différents.

Commençons par une addition toute simple où n'interviennent que des termes semblables. Trouvons la somme de $2x + 3x$. Le terme $2x$ signifie 2 fois la variable x, alors que $3x$ signifie 3 fois la variable x, soit :

$$2x = x + x$$
$$3x = x + x + x$$

Nous obtenons alors $2x + 3x = x + x + x + x + x$, soit 5 fois la variable x ou $5x$. Dans les deux termes semblables, nous constatons que seuls les coefficients numériques ont été additionnés, alors que la variable x est restée la même.

D'où la somme de ces 2 termes semblables peut s'écrire :

$$2x + 3x = (2 + 3)x = 5x$$

Pour trouver la **somme de deux termes semblables**, nous additionnons les coefficients numériques; la ou les variables restent les mêmes.

Exemple 2

$8ac + 3ac + ac = (8 + 3 + 1)ac = 12ac$

$5xy + 3xy + 4xy = 12xy$

$+ \quad +$

Cependant, **lorsque nous effectuons des additions dans des expressions algébriques, les termes ne sont pas toujours tous semblables. Dans ce cas, nous commençons par regrouper les termes semblables, puis nous effectuons la somme des coefficients de ces termes semblables.**

Exemple 3

$3x + 2y + 5x + 8y + 6$

1° Regroupons d'abord les termes semblables. Nous regroupons généralement les termes semblables en plaçant les variables selon l'ordre alphabétique, les termes constants se retrouvant à la fin.

$3x + 5x + 2y + 8y + 6$

2° Effectuons ensuite la somme des termes semblables par l'addition de leurs coefficients numériques.

$3x + 5x + 2y + 8y + 6 = 8x + 10y + 6$

L'expression algébrique est réduite à sa plus simple expression, car nous ne pouvons pas plus additionner des termes différents que des pommes, des oranges et des bananes.

Nous pouvons donc maintenant énoncer la règle qui suit.

Pour effectuer des additions dans une expression algébrique, nous devons :

1° regrouper les termes semblables;

2° additionner les coefficients numériques de ces termes en gardant les mêmes variables.

N'oubliez pas de convertir les fractions au même dénominateur lors de l'addition ou de la soustraction de termes semblables à coefficients numériques fractionnaires.

Exemple 4

$$\frac{1}{2}ab + 6b + \frac{2}{3}ab + b = \frac{1}{2}ab + \frac{2}{3}ab + 6b + b =$$
$$\frac{3}{6}ab + \frac{4}{6}ab + 6b + 1b = \frac{7}{6}ab + 7b = \frac{5}{3}ab + 7b$$

N.B. – Dans ce dernier exemple, il faut se rappeler que le coefficient numérique de b est le nombre 1 qui est sous-entendu.

Appliquons maintenant cette procédure à l'exercice suivant.

Exercice 1.3

Réduisez à leur plus simple expression les expressions algébriques suivantes.

1. $8b + 6b + b =$ ....
2. $3xy + 4xy + 2 + 5 =$ ....
3. $\frac{1}{3}x + 2y + \frac{1}{4}x + 2 =$ ....
4. $0{,}2z + 0{,}5 + 0{,}8z + x =$ ....

5. $6b + 7c + 2c + 3b =$ ....

6. $2abc + 3a + \frac{1}{2}b + 6abc + a =$ ....

Saviez-vous que...

... le symbole = n'existait pas encore lorsqu'en 1534, Jacques Cartier découvrit le Canada? C'est en 1557 dans un ouvrage d'algèbre publié par l'Anglais Robert Recorde qu'apparaît pour la première fois notre symbole d'égalité. Ce symbole ne sera toutefois utilisé couramment que vers la fin du XVII^{e} siècle.

Vous savez désormais additionner des termes semblables; essayez maintenant d'en faire la soustraction.

? Résolvez ce problème : $7x - 9x =$ ....

Si vous avez obtenu $-2x$, votre réponse est correcte. En effet, la soustraction de termes semblables s'effectue de la même façon que leur addition.

$$7x - 9x = (7 - 9)x = (7 + (-9))x = -2x$$

rappel

Soustraire un nombre dans $\mathbb{Z}$ équivaut à additionner son opposé. Ainsi, $-5 - 2 = -5 + (-2) = -7$

$$-5 - (-2) = -5 + 2 = -3$$

Pour effectuer des soustractions dans une expression algébrique, nous devons :

1° regrouper les termes semblables;

2° soustraire les coefficients numériques de ces termes en gardant les mêmes variables.

Exemple 5

$8ab - 5b - 10ab - 3b$

1° Les termes semblables sont $8ab$ et $-10ab$ ainsi que $-5b$ et $-3b$.
Le signe – doit accompagner le coefficient numérique.
Ces 2 groupes doivent être reliés par un +.

$8ab - 10ab + -5b - 3b$

2° Effectuons les opérations dans ces 2 groupes.
$-2ab + (-8b) = -2ab - 8b$

Exemple 6

$-3ac + 5ac - 0{,}8c - 2ac + 0{,}2c$

1° Les termes semblables sont $-3ac$, $5ac$ et $-2ac$ ainsi que $-0{,}8c$ et $0{,}2c$.

$-3ac + 5ac - 2ac + -0{,}8c + 0{,}2c$

2° $0ac + (-0{,}6c) = 0 - 0{,}6c = -0{,}6c$

N.B. – Le produit de 0 par un nombre ou une variable égale toujours 0.

Un dernier exemple où les étapes seront condensées telles que présentées dans le corrigé.

Exemple 7

$-z - 4xz + \frac{1}{2}z - xz =$

$-4xz - 1xz + -z + \frac{1}{2}z = -5xz + \frac{-2}{2}z + \frac{1}{2}z =$

$-5xz - \frac{1}{2}z$

Exercice 1.4

Dans les expressions algébriques suivantes, réduisez les termes semblables.

1. $8x - 3x - 5 =$ ....

2. $7xy - 6y - 9xy - 3y =$ ....

3. $-0{,}2z + 3 - 0{,}6z - 1 =$ ....

4. $\frac{2}{3}b - \frac{1}{4}b - 3 =$ ....

5. $-\frac{1}{3}c + ac + \frac{1}{4}c - 8ac - 8 =$ ....

Tania a suivi les conseils de Nathalie et elle a pu compter les fruits. Tout comme elle, n'oubliez pas de regrouper les termes semblables avant d'effectuer des additions et des soustractions dans une expression algébrique. Les exercices de consolidation qui suivent vous permettront d'acquérir l'aisance nécessaire pour entreprendre avec succès le sous-module suivant.

1.2 EXERCICES DE CONSOLIDATION

Réduisez les expressions algébriques suivantes à leur plus simple expression.

1. $8y + 3 - 5y =$ ....
2. $9z - 4 + 3z - 7 =$ ....
3. $-2z + 6 + 2 - 5z =$ ....
4. $-12b + 23b - 9 =$ ....
5. $-\frac{1}{8}c - \frac{1}{4}c + 3 - 2 =$ ....
6. $0{,}5d - 0{,}9d - 0{,}2d =$ ....
7. $-0{,}8a - 2{,}1 - 3a + 6 =$ ....
8. $18y - 26y - 31y =$ ....
9. $42 - 40z - 31z + 7 =$ ....
10. $0{,}89x + 0{,}92x + 8 + 18 =$ ....
11. $18xy + 22x - 8xy - 6x =$ ....
12. $-7z - 22yz + 18yz - 9z =$ ....
13. $8bc - bc + 7c - 9 - 10 =$ ....
14. $0{,}3d + 0{,}7d - 0{,}5b - 1{,}2b =$ ....
15. $\frac{2}{5}x - \frac{1}{4} - \frac{3}{5}y + \frac{4}{5}x - \frac{2}{3} =$ ....
16. $-3{,}2xy - 4{,}8x + 5xy - 8 =$ ....
17. $8z - 6y - 3z - 5z + 19y =$ ....

18. $-29bc + 13c - 8b - bc - 5c =$ ....

19. $-18xy - 9y - 2 + 22xy - 7y =$ ....

20. $4{,}5ab + 8 + 6{,}2ab - 7 + c =$ ....

21. $-xy + 8 + xy - 2x =$ ....

22. $2p - 3p + 8 =$ ....

23. $4r - d - 6d + 3 =$ ....

24. $3m - 2m - m + mn =$ ....

25. $5ab + bc + 3a + c =$ ....

1.3 ACTIVITÉ DE SYNTHÈSE

1. Qui suis-je?

   a) Je suis un symbole qui peut prendre plusieurs valeurs.

   ....

   b) Je suis un nombre placé devant une ou plusieurs variables et qui multiplie ces variables.

   ....

   c) Je suis un ensemble de nombres et de lettres réunis par les signes d'addition, de soustraction, de multiplication ou de division.

   ....

   d) Nous sommes des termes formés des mêmes variables mais qui n'ont pas nécessairement les mêmes coefficients numériques ni les mêmes signes.

   ....

2. Énumérez les 2 étapes à effectuer pour additionner ou soustraire des expressions algébriques.

   ....

   ....

1.4 LA PAGE DES MATHOPHILES

Utilisation de lettres comme symboles mathématiques

De nos jours, les variables sont représentées par des lettres. L'utilisation de lettres comme symboles mathématiques est-elle récente? Depuis quand utilise-t-on des symboles pour remplacer des quantités inconnues et des valeurs variables?

Il y a 3 600 ans, les Égyptiens se servaient de l'expression «haha» pour représenter une quantité inconnue. Nous avons retrouvé des papyrus (documents de l'époque) où plusieurs problèmes contiennent ce «haha».

Vers le troisième siècle de notre ère, Diophante, citoyen d'Alexandrie, représentait une quantité inconnue par le symbole $\int$ ou par un h renversé.

Pendant plusieurs siècles, les mathématiciens employèrent peu de symboles. Au début du XIII^{e} siècle, Jordanus Nemorarius introduisit l'usage de lettres pour symboliser des quantités connues ou inconnues.

Un Français, François Viète (1540-1603), étendit cet usage aux symboles algébriques. Il réservait les voyelles aux quantités inconnues et les consonnes aux quantités connues.

Notre convention moderne nous vient d'un autre Français, René Descartes (1569-1650). En 1637, il se sert des dernières lettres de l'alphabet, x, y et z, pour représenter des quantités inconnues et des premières lettres, a, b et c, pour représenter des quantités connues.