MAT-4101-2

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS II

sofad

MAT-4101-2

ÉQUATIONS

ET

INÉQUATIONS II

sofad

Ce cours a été produit par la Direction de la formation à distance du ministère de l'Éducation du Québec en collaboration avec le Service de l'éducation des adultes de la Commission scolaire catholique de Sherbrooke.

Responsable des mathématiques : Jean-Paul Groleau

Rédactrice : Monique Pagé

Réviseurs du contenu : Jean-Paul Groleau
Daniel Gélineau

Mise à jour : Jean-Paul Groleau

Réviseur linguistique : Martial Denis

Photocomposition et montage : Multitexte Plus

Édition électronique de la mise à jour : L'atelier du Mac inc.

Dernière impression : 2004

Bibliothèque et Achives nationales du Québec
Bibliothèque et Archives Canada
ISBN 978-2-89493-267-4

TABLE DES MATIÈRES

Présentation de l'ordinogramme 0.4
Ordinogramme du programme 0.5
Comment utiliser ce guide? 0.6
Introduction générale 0.9
Objectifs intermédiaires et terminaux du module 0.10
Épreuve diagnostique sur les préalables 0.13
Corrigé de l'épreuve diagnostique sur les préalables 0.21
Analyse des résultats de l'épreuve diagnostique 0.27
Suivez-vous ce cours en formation à distance? 0.29

SOUS-MODULES

1. Résolution d'un système d'équations par la méthode graphique 1.1
2. Résolution d'un système d'équations par la méthode de comparaison 2.1
3. Résolution d'un système d'équations par la méthode de substitution . 3.1
4. Résolution d'un système d'équations par la méthode d'élimination 4.1
5. Résolution d'un système d'équations : quatre méthodes possibles 5.1
6. Résolution de problèmes de la vie courante 6.1
7. Représentation graphique d'un système d'inéquations 7.1

Synthèse finale 8.1
Corrigé de la synthèse finale 8.11
Objectifs terminaux 8.18
Épreuve d'autoévaluation 8.21
Corrigé de l'épreuve d'autoévaluation 8.35
Analyse des résultats de l'épreuve d'autoévaluation 8.49
Évaluation finale 8.51
Corrigé des exercices 8.53
Glossaire 8.159
Liste des symboles 8.162
Bibliographie 8.163

Activités de révision 9.1

PRÉSENTATION DE L'ORDINOGRAMME

BIENVENUE AU ROYAUME DES MATHÉMATIQUES!

Ce programme de mathématiques a été élaboré pour la clientèle adulte des Services d'éducation des adultes des commissions scolaires et de la formation à distance. Les activités d'apprentissage qu'il contient ont été conçues pour être réalisées en apprentissage individualisé. Toutefois, si vous éprouvez des difficultés, n'hésitez pas à consulter votre formatrice ou votre formateur ou à téléphoner à la personne-ressource qui vous a été assignée. Le tableau qui suit situe dans le programme le module que vous avez entre les mains. Il vous permet de visualiser le chemin parcouru ou qui vous reste à parcourir selon l'objectif professionnel que vous poursuivez. Suivant les exigences de votre objectif professionnel, plusieurs voies de sortie du royaume des mathématiques sont prévues.

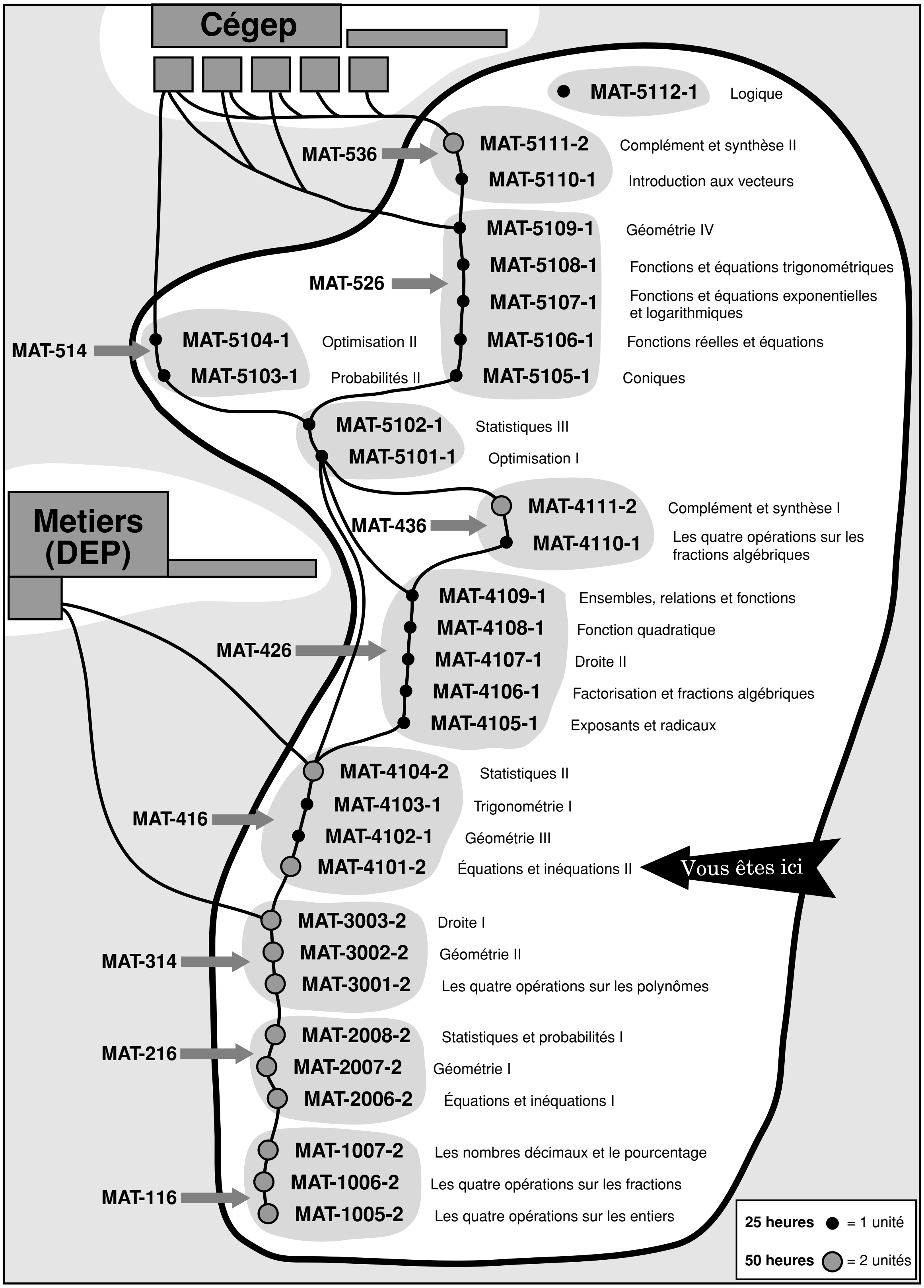
Les premières voies, les routes MAT-3003-2 (MAT-314) et MAT-4104-2 (MAT-416), vous permettent d'entreprendre des études menant à un diplôme d'études professionnelles (DEP).

Les routes MAT-4109-1 (MAT-426), MAT-4111-2 (MAT-436) et MAT-5104-1 (MAT-514), vous permettent d'obtenir un diplôme d'études secondaires (DES) qui donne accès à certains programmes d'études collégiales (cégep) n'exigeant pas de compétences particulières en mathématiques avancées.

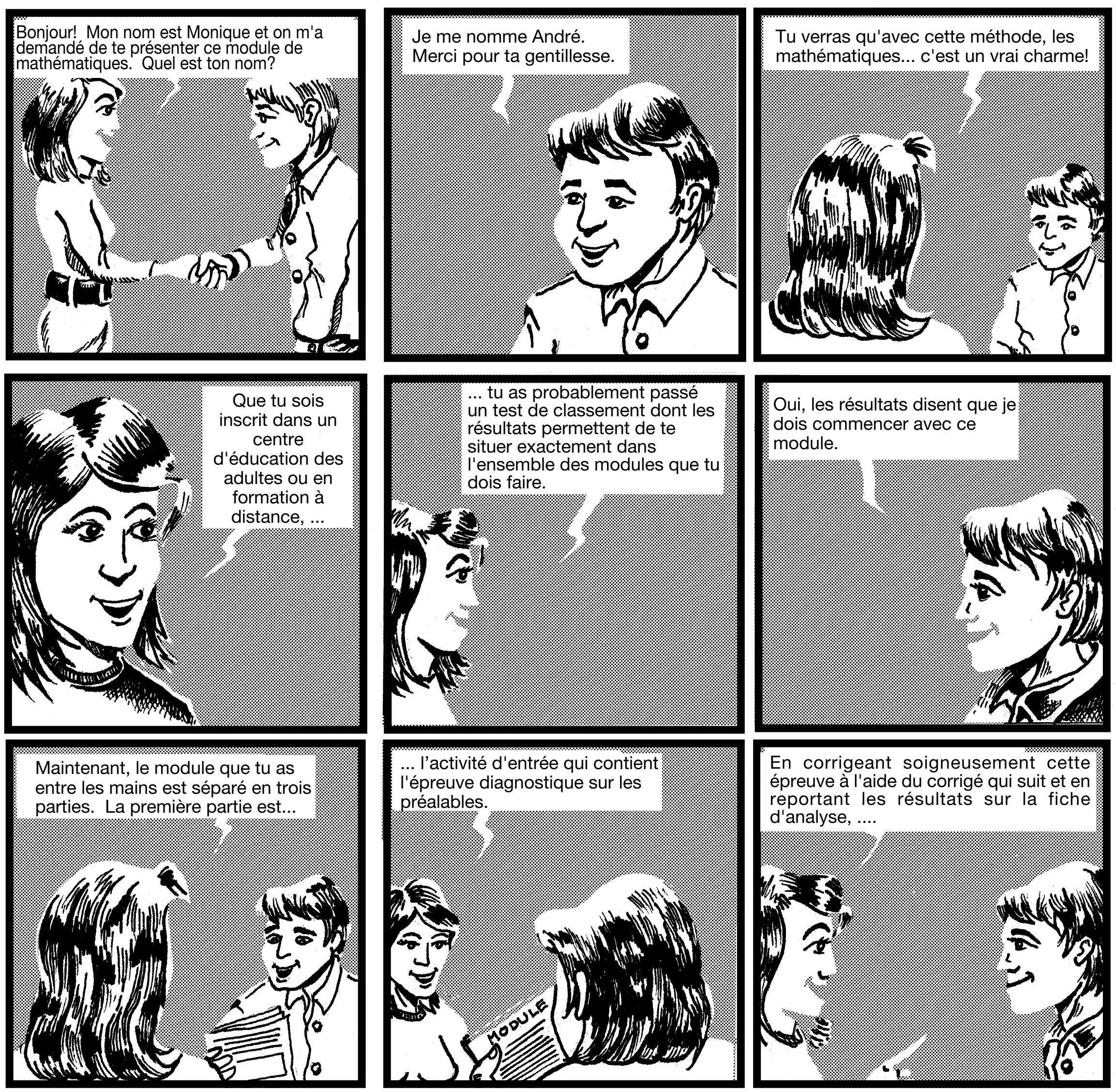
Finalement, les routes MAT-5109-1 (MAT-526) et MAT-5111-2 (MAT-536) vous permettent d'accéder au collège (cégep) dans des programmes qui exigent de solides connaissances en mathématiques et où d'autres défis vous attendent. Bonne route!

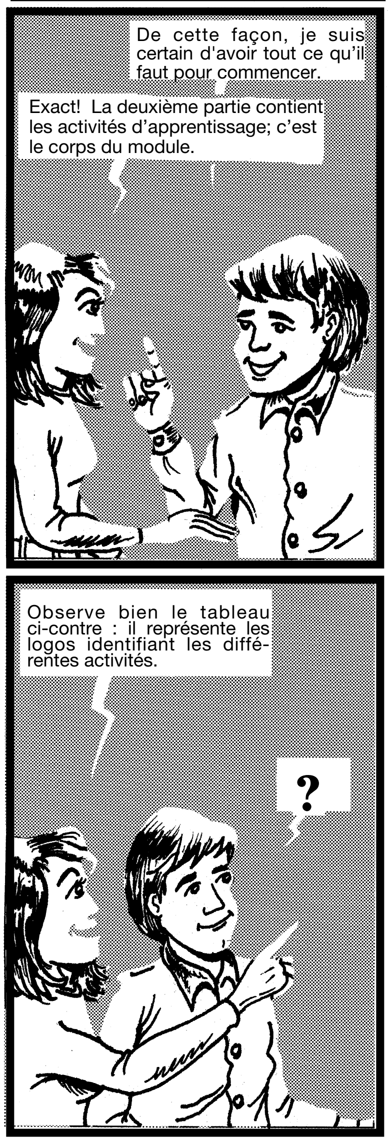
Si c'est votre premier contact avec ce programme de mathématiques, après avoir examiné l'ordinogramme du programme, lisez « Comment utiliser ce guide »; sinon, passez directement à la partie intitulée « Introduction générale ». Bon travail!

ORDINOGRAMME DU PROGRAMME



COMMENT UTILISER CE GUIDE?





La ligne de départ montre le **début** de l'apprentissage.

Le petit point d'interrogation blanc identifie les **questions** dont les réponses sont à l'intérieur du texte.

La cible signale l'**objectif** à atteindre.

Le bloc-notes indique un **rappel** des notions que tu as étudiées auparavant.

Le point d'interrogation en gras identifie les **exercices** de consolidation qui te permettront de mettre en pratique ce que tu viens d'apprendre.

La **calculatrice** te rappelle à quel moment t'en servir.

La gerbe de blé identifie une **synthèse** qui te permet de faire le point sur ce que tu viens d'apprendre. Ce logo répété plusieurs fois signifie que tu approches de la fin du module. C'est la synthèse finale qui te permet de faire le lien entre tous les apprentissages du module.

Finalement, la ligne d'arrivée indique qu'il est temps de passer à l'**autoévaluation** pour vérifier si tu as bien assimilé les apprentissages réalisés.


Il y a aussi beaucoup de choses amusantes dans ce module. Par exemple, lorsque tu vois la figure d'un sage, c'est un «Saviez-vous que...?».
«Saviez-vous que...?»
Oui, par exemple, de petites notes sur l'histoire des mathématiques, des jeux amusants. C'est intéressant et cela te calme en même temps.
Dois-je mémoriser ce que dit le sage?
Non, cela ne fait pas partie de l'apprentissage; c'est un peu comme un moment de détente.
C'est la même chose pour « La page des mathophiles ». En fait, ce mot signifie « qui aime les mathématiques ».
C'est tellement stimulant que, même si tu n'es pas obligé de la travailler, tu as envie de la faire.
Et puis, tout au long du module, les auteurs se sont arrangés pour te faciliter la tâche...
... ainsi, les mots en italiques gras apparaissent dans le glossaire à la fin du module...
PARFAIT!
... les passages encadrés t'indiquent qu'il s'agit de points à retenir comme des définitions, des formules, des règles, etc. Je te le dis, c'est plus facile.
Enfin, la troisième partie contient la synthèse finale qui vient faire le lien entre les différentes parties du module.
De plus, tu y trouveras une épreuve d'autoévaluation ainsi que son corrigé. Tu sauras à ce moment-là si tu es prêt pour l'examen final.
Merci, Monique, tu m'as rendu un grand service.
Tout le plaisir est pour moi.
Maintenant, je me sauve. Au revoir!
Plus tard...
C'est fantastique! Je n'aurais jamais cru aimer les mathématiques autant que ça.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

CHEMINEMENT VERS UNE SOLUTION

Le détective voudrait bien découvrir rapidement le coupable en fonction des renseignements dont il dispose, la pharmacienne ou le cuisinier aimeraient trouver du premier coup la dose exacte de leurs mélanges, l'agronome serait satisfait s'il pouvait connaître la quantité idéale d'engrais pour un terrain, simplement en le regardant; tous nous cherchons la solution rapide, immédiate, définitive. Hélas! les solutions données sont rares.

Par suite de la quantité incroyable de données dont il faut tenir compte pour résoudre les multiples problèmes auxquels nous faisons face, il nous faut établir des relations entre ces diverses informations, en déduire des solutions possibles et disposer en outre d'outils fiables pour évaluer ces mêmes solutions.

Le jardinier doit en effet évaluer la quantité d'engrais qui conviendrait le mieux à son potager à partir d'observations recueillies dans son jardin les années précédentes et des expériences tentées par les agronomes. Il doit également connaître et la technique de dissolution de ses produits pour obtenir un mélange efficace et le moment où il doit épandre l'engrais . S'il veut trouver la solution à un problème botanique de fertilité, il doit envisager tous ces facteurs.

Pour atteindre l'objectif de ce module, vous devrez être capable de résoudre des problèmes de la vie courante en traduisant par un système d'équations ou d'inéquations les liens qui existent entre les données d'un problème. Vous devrez d'abord maîtriser l'outil qu'est la résolution algébrique de ces systèmes ainsi que leur représentation graphique. Cette dernière est la concrétisation visuelle d'informations. Elle permet la lecture des éléments recherchés et donne une vision globale des possibilités qui découlent d'une situation particulière.

OBJECTIFS INTERMÉDIAIRES ET TERMINAUX DU MODULE

Le module MAT-4101-2 comporte sept sous-modules et prévoit une durée d'apprentissage de cinquante heures, réparties tel qu'il et indiqué dans le tableau ci-dessous. Les objectifs terminaux sont en caractères gras.

Objectifs	**Nombres d'heures***	**% (évaluation)**
1	4	10 %
2 **à 5**	10	40 %
6	8	30 %
7	6	20 %

* Deux heures sont réservées à l'évaluation finale.

1. Résolution d'un système d'équations par la méthode graphique

Résoudre graphiquement un système de deux équations du premier degré à deux variables de la forme $Ax + By + C = 0$. Les coefficients A, B et C sont des nombres rationnels ($\mathbb{Q}$). Les étapes de résolution doivent être décrites.

2. Résolution d'un système d'équations par la méthode de comparaison

Résoudre algébriquement en appliquant la méthode de résolution par comparaison un système de deux équations du premier degré à deux variables de la forme $Ax + By + C = 0$. Les coefficients A, B et C sont des nombres rationnels ($\mathbb{Q}$). Les étapes de résolution doivent être décrites.

3. Résolution d'un système d'équations par la méthode de substitution

   Résoudre algébriquement en appliquant la méthode de résolution par substitution un système de deux équations du premier degré à deux variables de la forme $Ax + By + C = 0$. Les coefficients A, B et C sont des nombres réels rationnels ($\mathbb{Q}$). Les étapes de résolution doivent être décrites.

4. Résolution d'un système d'équations par la méthode d'élimination

   Résoudre algébriquement en appliquant la méthode d'élimination un système de deux équations du premier degré à deux variables de la forme $Ax + By + C = 0$. Les coefficients A, B et C sont des nombres rationnels ($\mathbb{Q}$). Les étapes de résolution doivent être décrites.

5. **Résolution d'un système d'équations par l'une ou l'autre des méthodes étudiées précédemment**

   Résoudre un système de deux équations du premier degré à deux variables de la forme $Ax + By + C = 0$ en appliquant l'une ou l'autre de ces méthodes :
   - **la méthode graphique;**
   - **la méthode de comparaison;**
   - **la méthode de substitution;**
   - **la méthode d'élimination.**

   Les coefficients A, B et C sont des nombres rationnels ($\mathbb{Q}$). Les étapes de résolution doivent être décrites.

6. **Résolution de problèmes de la vie courante**

   Résoudre un problème à données textuelles convertible en système de deux équations du premier degré à deux variables et nécessitant la résolution de ce système. Les situations présentées sont empruntées à la vie courante. Les nombres choisis sont des nombres rationnels ($\mathbb{Q}$). La solution doit être accompagnée des étapes de résolution.

7. Représentation graphique d'un système d'inéquations

Résoudre en appliquant la méthode de résolution par représentation graphique un système de deux inéquations du premier degré à deux variables de la forme

- $Ax + By + C < 0$,
- $Ax + By + C > 0$,
- $Ax + By + C \leq 0$,
- $Ax + By + C \geq 0$.

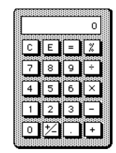
Les coefficients A, B et C sont des nombres rationnels ($\mathbb{Q}$).

ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE SUR LES PRÉALABLES

Consignes

1° Répondez autant que possible à toutes les questions.

2° L'utilisation de la calculatrice est permise.



3° Inscrivez vos réponses directement sur la feuille.

4° Ne perdez pas de temps. Si vous ne pouvez répondre à une question, passez immédiatement à la suivante.

5° Dès que vous aurez répondu à toutes les questions auxquelles il vous est possible de répondre, corrigez vos réponses à l'aide du corrigé qui suit l'épreuve diagnostique.

6° Vos réponses devront être exactes pour être considérées comme correctes. De plus, les différentes étapes de la résolution devront être équivalentes à celles qui sont suggérées.

7° Transcrivez vos résultats sur la fiche d'analyse des résultats de l'épreuve diagnostique qui suit le corrigé.

8° Prenez connaissance des activités de révision proposées pour chacune des réponses incorrectes.

9° Si toutes vos réponses sont exactes, vous possédez les préalables nécessaires pour entreprendre l'étude de ce module.

1. Calculez la valeur numérique des expressions arithmétiques suivantes. Les étapes de la résolution du problème et la réponse sont exigées. Arrondissez le résultat au centième près à chacune des étapes s'il y a lieu.

   a) $8[3(3 + 2 \times 23) - 7] - (4 - 2 \times 7)$

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   b) $\dfrac{23 + 7 \times 2 - 7 + 3}{4 \times 3 + 2} - \dfrac{8 \times 2 - 13 + 4}{7(2 \times 3 - 5)}$

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

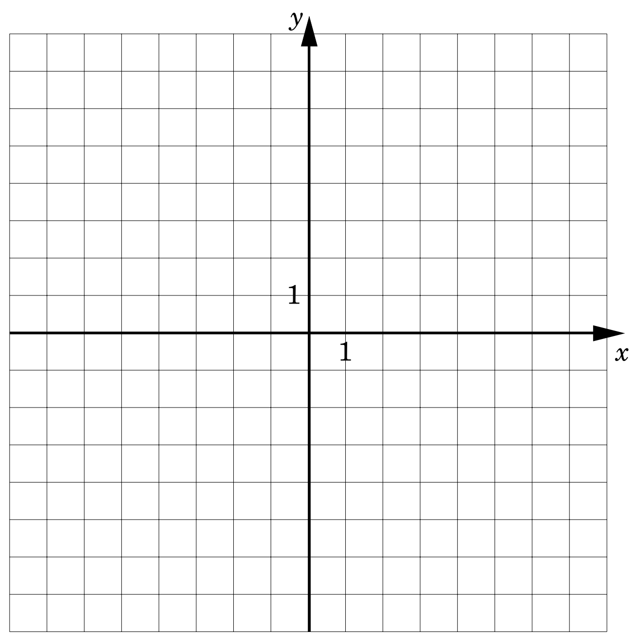
   ....

   ....

   ....

c) $[0{,}5(2{,}4 - 4{,}2)] \div (7{,}2 + 3{,}7 \div 4{,}2)$

2. a) À l'aide des tableaux de valeurs donnés, situez sur le plan cartésien les points correspondant aux couples décrits et tracez les droites passant par ces points.



①

x	0	2	4	5
y	2	4	6	7

②

x	-3	-3	-3	-3
y	-1	0	4	5

③

x	-1	0	4	6
y	-2	-2	-2	-2

b) Lequel des trois tableaux de valeurs précédents renferme les couples qui vérifient l'égalité $x = y - 2$?

Réponse : ....

3. Pour chacune des équations ci-dessous, complétez un tableau de valeurs et tracez la droite correspondante.

① $3x + y = 6$
② $y = 5$
③ $x + 3 = 9$

①

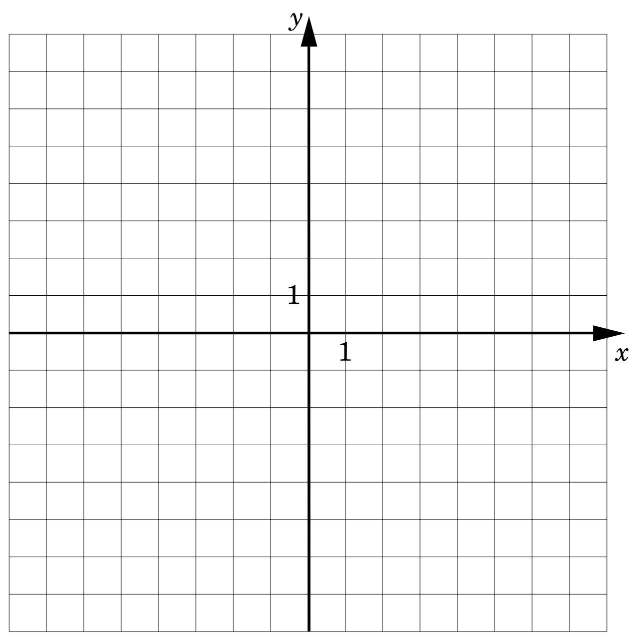
x			
y			

②

x			
y			

③

x			
y			



4. Dans l'expression algébrique $\frac{4x}{3} + 48$, déterminez

a) la variable : ....
b) le coefficient numérique : ....
c) l'opposé du terme constant : ....
d) l'inverse du coefficient numérique : ....

5. Résolvez les équations suivantes. La solution détaillée est exigée. Arrondissez le résultat au centième près s'il y a lieu.

a) $3x - 7 = 2x + 8$

....

....

b) $\frac{7x}{8} + 4 - \frac{2x}{3} = 4x - 3$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

c) $\frac{4x - 2}{3} = \frac{6x + 2}{7}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

d) $\dfrac{0{,}5x - 2{,}4}{0{,}7} = \dfrac{0{,}2x - 3}{0{,}5}$

6. En vous servant du principe de la distributivité, isolez la variable y dans les équations suivantes.

a) $3(2y - 4) + 10y - 6 = 2(9y + 3)$

b) $\dfrac{8(2 - 3y)}{4} = \dfrac{(3 - 4y)2}{3}$

7. Thelma gagne un salaire brut hebdomadaire de 404 \$. Elle travaille 8 heures par jour et 5 jours par semaine. Si on lui enlève chaque semaine 24 % de son salaire en déductions diverses, calculez son salaire annuel net (52 semaines).

8. Louise et Paul calculent leur budget. Louise met de côté le $\frac{1}{4}$ de sa paie hebdomadaire nette pour faire des économies et Paul en fait autant avec le $\frac{1}{5}$ de sa propre paie. Si les salaires annuels nets de Louise et de Paul s'élèvent respectivement à 19 285 $ et 20 930 $, calculez combien d'argent Paul consacre par semaine à ses dépenses courantes.

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE SUR LES PRÉALABLES

1. a) $8[3(3 + 2 \times 23) - 7] - (4 - 2 \times 7)$

$8[3(3 + 46) - 7] - (4 - 14)$

$8[3(49) - 7] - (-10)$

$8[147 - 7] + 10$

$8[140] + 10$

$1\,120 + 10$

$1\,130$

b) $\dfrac{23 + 7 \times 2 - 7 + 3}{4 \times 3 + 2} - \dfrac{8 \times 2 - 13 + 4}{7(2 \times 3 - 5)}$

$\dfrac{23 + 14 - 7 + 3}{12 + 2} - \dfrac{16 - 13 + 4}{7(6 - 5)}$

$\dfrac{37 - 7 + 3}{14} - \dfrac{3 + 4}{7(1)}$

$\dfrac{30 + 3}{14} - \dfrac{7}{7}$

$\dfrac{33}{14} - \dfrac{14}{14}$

$\dfrac{19}{14}$ ou $1\dfrac{5}{14}$

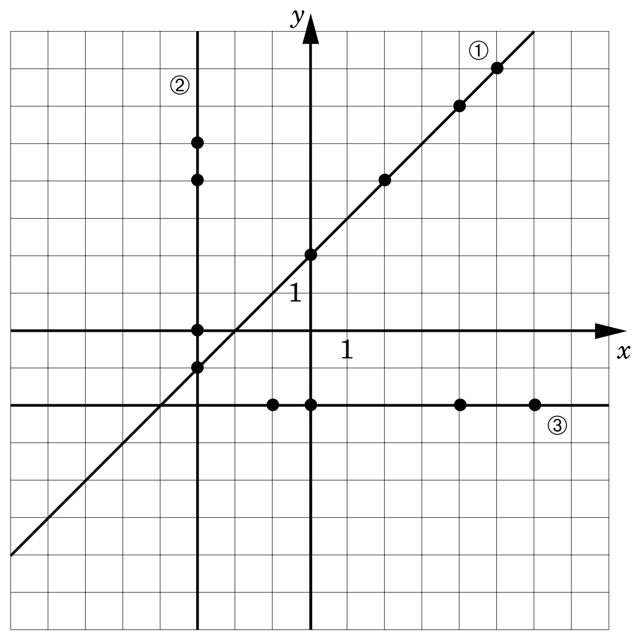
c) $[0,5(2,4 - 4,2)] \div (7,2 + 3,7 \div 4,2)$

$[0,5(-1,8)] \div (7,2 + 0,88)$

$-0,9 \div 8,08$

$-0,11$

2. a)



b) ①

3. ① $y = -3x + 6$

② $y = 5$

③ $x = 6$

①

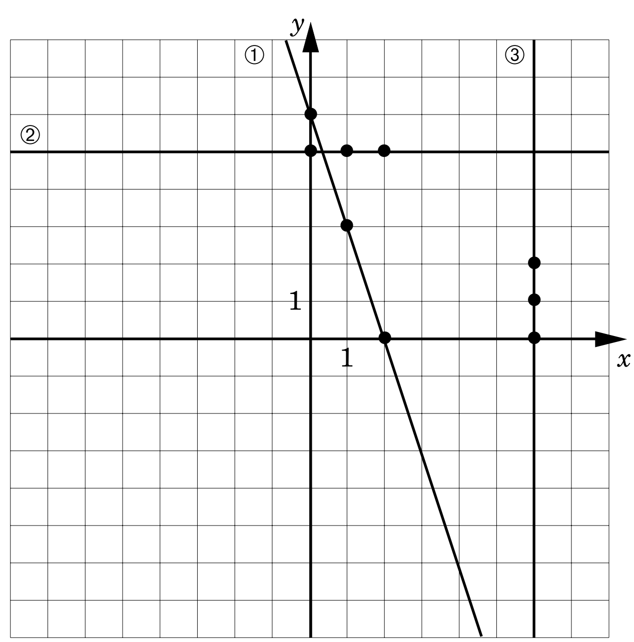
x	0	1	2
y	6	3	0

②

x	0	1	2
y	5	5	5

③

x	6	6	6
y	0	1	2



4. a) x b) $\frac{4}{3}$ c) -48 d) $\frac{3}{4}$

5. a) $3x - 7 = 2x + 8$

$3x - 2x = 8 + 7$

$x = 15$

b) $\frac{7x}{8} + 4 - \frac{2x}{3} = 4x - 3$

$\frac{21x}{24} + \frac{96}{24} - \frac{16x}{24} = \frac{96x}{24} - \frac{72}{24}$

$21x + 96 - 16x = 96x - 72$

$21x - 16x - 96x = -72 - 96$

$-91x = -168$

$x = \frac{-168}{-91}$

$x = \frac{168}{91} = \frac{24}{13}$ ou $1\frac{11}{13}$ ou 1,85

c) $\frac{4x - 2}{3} = \frac{6x + 2}{7}$

$7(4x - 2) = 3(6x + 2)$

$28x - 14 = 18x + 6$

$28x - 18x = 6 + 14$

$10x = 20$

$x = \frac{20}{10}$

$x = 2$

d) $\frac{0{,}5x - 2{,}4}{0{,}7} = \frac{0{,}2x - 3}{0{,}5}$

$0{,}5(0{,}5x - 2{,}4) = 0{,}7(0{,}2x - 3)$

$0{,}25x - 1{,}2 = 0{,}14x - 2{,}1$

$0{,}25x - 0{,}14x = -2{,}1 + 1{,}2$

$0{,}11x = -0{,}9$

$x = \frac{-0{,}9}{0{,}11}$

$x = -8{,}18$

6. a) $3(2y - 4) + 10y - 6 = 2(9y + 3)$

$$6y - 12 + 10y - 6 = 18y + 6$$
$$6y + 10y - 18y = 6 + 6 + 12$$
$$-2y = 24$$
$$y = \frac{24}{-2}$$
$$y = -12$$

b) $\dfrac{8(2 - 3y)}{4} = \dfrac{(3 - 4y)2}{3}$

$$\frac{16 - 24y}{4} = \frac{6 - 8y}{3}$$
$$3(16 - 24y) = 4(6 - 8y)$$
$$48 - 72y = 24 - 32y$$
$$-72y + 32y = 24 - 48$$
$$-40y = -24$$
$$y = \frac{-24}{-40}$$
$$y = \frac{3}{5} \text{ ou } 0{,}6$$

7. • Nous cherchons le salaire annuel net de Thelma.

• Mathématisation

[404 \$ – (404 \$ × 24 %)] × 52

• Estimation

$$\left[400\ \$ - \left(400\ \$ \times \frac{25}{100}\right)\right] \times 50 = [400\ \$ - 100\ \$] \times 50 = [300\ \$] \times 50 =$$

15 000 \$

• Résolution

$$\left[404\ \$ - \left(404\ \$ \times \frac{24}{100}\right)\right] \times 52 = [404\ \$ - 96{,}96\ \$] \times 52 =$$

[307,04 \$] × 52 = 15 966,08 \$

- Le résultat est près de l'estimation

- Le salaire annuel net de Thelma est de 15 966,08 $.

8. - Nous cherchons le montant d'argent que Paul consacre par semaine à ses dépenses courantes.

- Mathématisation

$$\left(20\ 930\ \$ - 20\ 930\ \$ \times \frac{1}{5}\right) \div 52$$

- Estimation

$$\left(20\ 000\ \$ - 20\ 000\ \$ \times \frac{1}{5}\right) \div 50 = (20\ 000\ \$ - 4\ 000\ \$) \div 50 =$$

$$16\ 000\ \$ \div 50 = 320\ \$$$

- Résolution

$$\left(20\ 930\ \$ - 20\ 930\ \$ \times \frac{1}{5}\right) \div 52 = (20\ 930\ \$ - 4\ 186\ \$) \div 52 =$$

$$16\ 744\ \$ \div 52 = 322\ \$$$

- Le résultat est près de l'estimation.

- Paul consacre 322 $ par semaine à ses dépenses courantes.

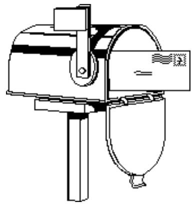
ANALYSE DES RÉSULTATS DE L'ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE

Questions	Réponses		Révision		À faire avant
	Correctes	Incorrectes	Section	Page	
1. a)			9.2	9.19	Sous-module 1
b)			9.2	9.19	Sous-module 1
c)			9.2	9.19	Sous-module 1
2. a)			9.3	9.25	Sous-module 1
b)			9.3	9.25	Sous-module 1
3.			9.3	9.25	Sous-module 1
4. a)			9.4	9.36	Sous-module 2
b)			9.4	9.36	Sous-module 2
c)			9.4	9.36	Sous-module 2
d)			9.4	9.36	Sous-module 2
5. a)			9.4	9.36	Sous-module 2
b)			9.4	9.36	Sous-module 2
c)			9.4	9.36	Sous-module 2
d)			9.4	9.36	Sous-module 2
6. a)			9.4	9.36	Sous-module 2
b)			9.4	9.36	Sous-module 2
7.			9.1	9.4	Sous-modules 1 et 6
8.			9.1	9.4	Sous-modules 1 et 6

- Si toutes vos réponses sont **correctes**, vous possédez les préalables nécessaires pour entreprendre l'étude de ce module.

- Pour chaque réponse **incorrecte**, référez-vous aux activités proposées dans la colonne « **Révision** ». Effectuez les activités de révision avant d'entreprendre l'étude de chaque sous-module proposée dans la colonne de droite « **À faire avant** ».

Corrigé



SUIVEZ-VOUS CE COURS EN FORMATION À DISTANCE?

Vous avez présentement entre les mains le matériel didactique du cours MAT-4101-2 ainsi que les devoirs qui s'y rattachent. À ce matériel est jointe une lettre de votre tutrice ou de votre tuteur. Cette lettre vous indique les différents canaux par lesquels vous pourrez communiquer avec elle ou lui (lettre, téléphone, etc.) ainsi que les heures réservées à ces prises de contact. En plus de corriger vos travaux, la tutrice ou le tuteur est la personne-ressource qui vous aidera dans votre apprentissage. Donc, n'hésitez pas à faire appel à ses services si vous éprouvez quelque difficulté.

UNE MÉTHODE GÉNÉRALE DE TRAVAIL

L'enseignement à distance est un processus d'apprentissage d'une grande souplesse, mais il exige de votre part un engagement actif. Il requiert en effet de la régularité dans l'étude et un effort soutenu. Une méthode efficace de travail vous facilitera la tâche. Un cheminement d'apprentissage constant et productif ne peut échapper aux règles suivantes.

- Fixez-vous un horaire qui vous permet d'étudier selon vos possibilités tout en tenant compte de vos loisirs et de vos activités.

- Astreignez-vous à une étude régulière et assidue.

Pour vous aider à réussir ce cours de mathématiques, voici quelques règles à suivre concernant la théorie, les exemples, les exercices et les devoirs.

La théorie

Pour assimiler correctement les notions théoriques, portez attention aux points suivants.

1° Lisez attentivement le texte et soulignez les points importants.

2° Mémorisez les définitions, les formules et les marches à suivre pour résoudre un problème donné; cela facilitera la compréhension du texte.

3° Notez, à la fin du devoir, les points que vous ne comprenez pas. Votre tutrice ou votre tuteur vous donnera alors des explications pertinentes.

4° Essayez de poursuivre votre étude même si vous butez sur un obstacle particulier. Cependant, si une difficulté importante vous empêche de poursuivre la démarche d'apprentissage, n'attendez pas d'envoyer votre devoir pour demander des explications : adressez-vous à votre tutrice ou à votre tuteur selon les modalités prévues dans sa lettre.

Les exemples

Les exemples sont des applications de la théorie. Ils illustrent le cheminement à suivre pour résoudre les exercices. Aussi, étudiez attentivement les solutions proposées dans les exemples et refaites-les pour vous-même avant d'entreprendre les exercices.

Les exercices

Les exercices d'un sous-module respectent généralement le modèle des exemples donnés. Voici quelques suggestions pour réussir ces exercices.

1° Rédigez les solutions en prenant pour modèle les exemples présentés dans le texte. Il est important de ne pas consulter le corrigé qui se trouve à la fin du texte sur des feuilles de couleur avant d'avoir terminé les exercices.

2° Évaluez vos solutions à l'aide du corrigé uniquement après avoir fait tous les exercices. **Attention!** Vérifiez attentivement les étapes de votre solution, même si votre réponse est exacte.

3° Si vous relevez une erreur dans votre réponse ou votre solution, revoyez les notions que vous n'avez pas comprises ainsi que les exemples qui s'y rattachent. Ensuite, recommencez l'exercice.

4° Assurez-vous d'avoir réussi tous les exercices d'un sous-module avant de passer au suivant.

Les devoirs

Le cours MAT-4101-2 comprend trois devoirs. La première page de chaque devoir indique à quels sous-modules se rapportent les questions posées. Les devoirs servent à évaluer votre degré de compréhension de la matière étudiée. Ils sont également un moyen de communication avec votre tutrice ou votre tuteur.

Quand vous aurez assimilé la matière et réussi les exercices qui s'y rattachent, rédigez sans délai le devoir correspondant.

1° Faites d'abord un brouillon. Apportez à vos solutions toutes les modifications nécessaires avant de mettre au propre la réponse finale.

2° Transcrivez au crayon à la mine, de préférence, les réponses ou les solutions dans les espaces en blanc du document à retourner.

3° Accompagnez chaque réponse d'une solution claire et détaillée s'il s'agit d'une question qui exige un développement.

4° Ne postez que un devoir à la fois; nous vous le retournerons après correction.

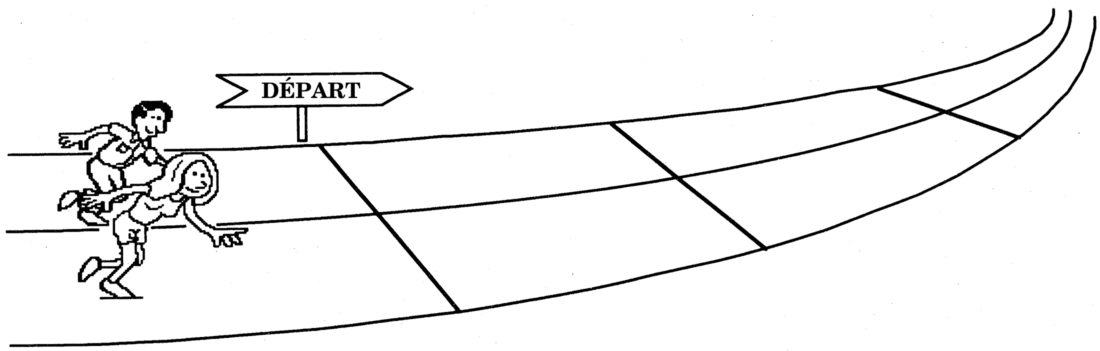
Écrivez, dans la section « Questions de l'élève », les questions que vous désirez poser à la tutrice ou au tuteur. Cette dernière ou ce dernier vous prodiguera des conseils. Elle ou il pourra vous guider dans vos études et vous orienter si c'est nécessaire.

Dans ce cours

Le devoir 1 porte sur les sous-modules 1 à 5.
Le devoir 2 porte sur les sous-modules 6 et 7.
Le devoir 3 porte sur les sous-modules 1 à 7

ATTESTATION D'ÉTUDES

Lorsque vous aurez terminé tous les travaux et si vous avez maintenu une moyenne d'au moins 60 %, vous serez autorisé à passer l'examen.



SOUS-MODULE 1

RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS PAR LA MÉTHODE GRAPHIQUE

1.1 ACTIVITÉ D'ACQUISITION

Histoire d'eau

M. Touchatou exploite l'érablière familiale depuis quelques années. Il possède un baril aussi vieux que lui, rempli de 40 litres d'eau d'érable. Malheureusement une fente récente à la base du baril occasionne par heure une fuite de deux litres du précieux liquide.

M. Touchatou s'est alors empressé de glisser un autre baril sous le premier. La fuite est désormais recueillie par le second baril en bon état qui contenait déjà 10 litres d'eau d'érable.

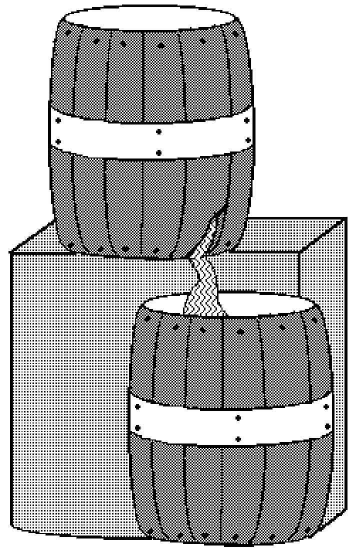
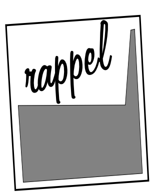


Fig. 1.1 M. Touchatou sauve la situation

M. Touchatou sait, pour l'avoir étudié dans un cours de mathématiques, que bien des situations de la vie courante peuvent être converties en expressions algébriques. Il se demande comment évolueront les deux niveaux d'eau et à quel moment les deux barils en contiendront la **même** quantité.

Pour ce faire, la situation peut se traduire par deux ***équations*** du premier degré où

x représente le temps écoulé en heures depuis le début de la fuite d'eau;
y représente le même volume d'eau, en litres, dans chaque baril.



*Une équation est un énoncé formé de deux expressions mathématiques renfermant une ou plusieurs **variables** reliées entre elles par le signe =.*
Par exemple, 5x + 4 = 7 est une équation du premier degré.

Posons x comme étant le nombre d'heures pendant lesquelles le baril perd son eau.

- La première équation est reliée au baril qui se vide.

  Soit $2x$ le volume d'eau perdu, car la perte est de 2 l par heure;
  y le volume d'eau au moment où les deux barils ont la même quantité de liquide;
  40 l le volume d'eau à l'origine.

  Alors, ① $2x + y = 40$.

- La deuxième équation est reliée au deuxième baril qui se remplit.

  Soit $2x$ le volume d'eau recueilli;
  y le volume d'eau au moment où les deux barils ont la même quantité de liquide;
  10 l le volume d'eau à l'origine.

  Alors, ② $2x + 10 = y$.

N.B. – Vous verrez dans le sous-module 6 **comment traduire** en équations une telle situation. Pour l'instant, concentrez-vous sur ce que M. Touchatou veut en faire.

Les deux variables x et y sont reliées entre elles, c'est-à-dire que le volume d'eau, y, dans un baril dépend du temps x écoulé depuis le début de la fuite.

Nous sommes donc en présence de deux équations associées à un même contexte : puisque nous ne pouvons séparer ces deux barils, nous ne pouvons pas non plus séparer les deux équations. **C'est donc l'*ensemble* de ces équations qui représente la situation en cours. Cet ensemble se nomme un *système d'équations***.

> Un **système d'équations** du premier degré est un ensemble d'équations qui doivent être résolues simultanément.

Les équations ① $2x + y = 40$

② $2x + 10 = y$

représentent un système d'équations. Nous devons trouver pour quelles valeurs de x et de y ces deux équations sont vérifiées simultanément.

Pour ce faire, nous allons nous servir du plan cartésien et de la représentation graphique de ces deux équations.

Pour atteindre l'objectif de ce sous-module, vous devrez être capable de représenter graphiquement un système d'équations du premier degré à deux variables, de préciser la position relative des deux *droites* et de donner la ou les solutions du système.

La première étape consiste à **représenter graphiquement chacune des équations** du système après avoir complété un tableau de valeurs.

Pour compléter facilement un tableau de valeurs, il est recommandé d'isoler une des deux variables. Prenons les équations de M. Touchatou et isolons y pour obtenir la forme $y = mx + b$. Nous aurons donc ce qui suit.

① $2x + y = 40$
$y = -2x + 40$

② $2x + 10 = y$
$y = 2x + 10$

Le système du début se trouve ainsi converti en un système d'équations ***équivalent***.

① $y = -2x + 40$

② $y = 2x + 10$

? Complétez le tableau de valeurs relatif à chacune de ces équations.

① x	$y = -2x + 40$		② x	$y = 2x + 10$
0	$-2(0) + 40 = 40$		0	
2	$-2(2) + 40 = 36$		2	
4	$-2(4) + 40 = 32$		4	
8	$-2(8) + 40 = 24$		6	
10			10	

Vous avez sans doute obtenu le ***couple*** (10, 20) pour l'équation ① et les couples (0, 10), (2, 14), (4, 18), (6, 22) et (10, 30) pour l'équation ②.

Prenons le couple (4, 32) de l'équation ①. Nous disons que ces deux nombres forment un couple-solution de l'équation ①, car si nous remplaçons x par 4 et y par 32 dans cette équation, l'égalité est respectée. En effet, $y = -2x + 40$ devient

$$32 = -2(4) + 40$$
$$32 = -8 + 40$$
$$32 = 32.$$

Un couple ordonné de nombres est appelé **couple-solution** d'une équation du premier degré à deux variables si, après substitution, ce couple respecte l'égalité de l'équation.

Arrêtons momentanément les calculs de M. Touchatou. Avant de transformer ces équations en graphique, il est nécessaire de s'exercer à les convertir sous la forme $y = mx + b$ et à dresser un tableau de valeurs associé à une équation à deux variables.

Exercice 1.1

1. Transformez chacun de ces systèmes d'équations en un système de la forme suivante.

$$① \ y = m_1x + b_1$$
$$② \ y = m_2x + b_2$$

a) ① $3x - 6y - 12 = 0$ ② $3x - 6y + 6 = 0$

b) ① $8x - 2y + 3x = 5 + 12x - 4y$ ② $10x + y + 3 = 5 - 3y + 10x$

c) ① $3x = 4y$ ② $x = \dfrac{2y + 1}{3}$

d) ① $3(x - 1) + 2(y + 3) = 8$ ② $4x - (y - 6) = 9$

2. Dressez les deux tableaux de valeurs associés au système d'équations suivant.

① $10x + y + 27 = 10y + x$
② $x + y = 7$

①

②

①

x	y

②

x	y

Puisque vous savez comment déterminer des couples-solutions pour une équation, passons à l'étape suivante : la représentation graphique.

M. Touchatou doit cette fois transposer dans un même ***plan cartésien*** les couples-solutions de chacune des équations de son système. Les représentations graphiques de ces équations sont des droites.

Résumons ici la démarche poursuivie.

1° M. Touchatou a établi son système d'équations.

① $2x + y = 40$

② $2x + 10 = y$

2° Il a transformé les équations sous la forme $y = mx + b$.

① $y = -2x + 40$

② $y = 2x + 10$

3° Il a dressé les tableaux de valeurs.

x	y
0	40
2	36
4	32
8	24
10	20

x	y
0	10
2	14
4	18
6	22
10	30

N.B. – Chaque tableau de valeurs propose un ensemble de couples-solutions à situer sur le plan cartésien. Un minimum de trois couples-solutions par équation est nécessaire au tracé correct des droites.

4° Il lui faut maintenant représenter graphiquement chacune des équations.

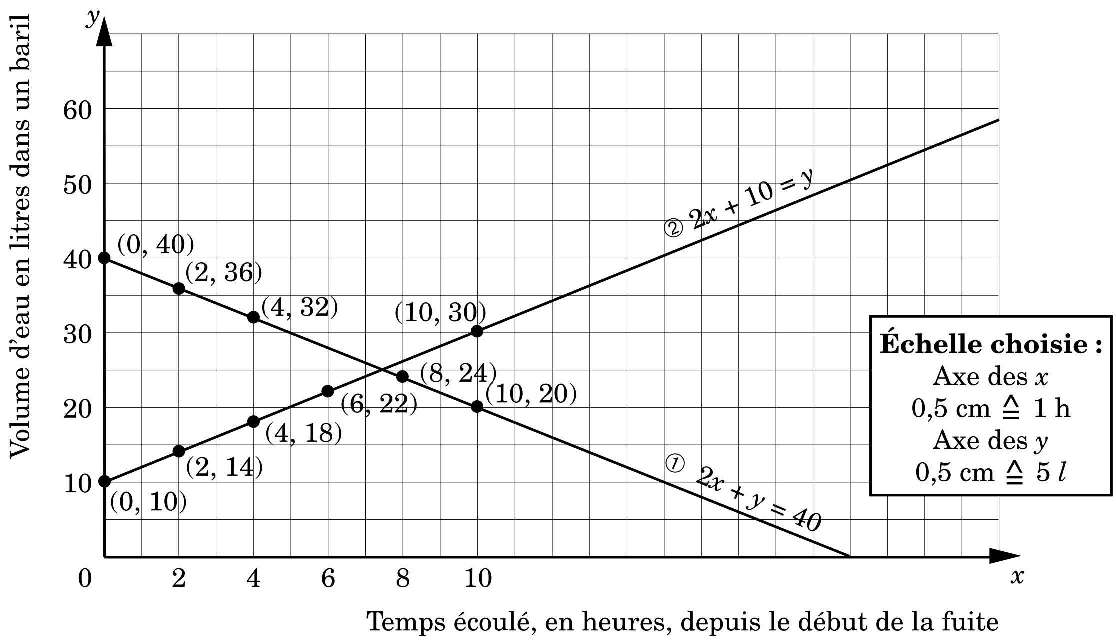


Fig. 1.2 Droites ***sécantes*** représentant le système d'équations de M. Touchatou

? Ces deux droites se rencontrent-elles en un point? ....

? Par quel terme désignons-nous ce point en langage mathématique?

....

En effet, ces deux droites se coupent en un point nommé ***point d'intersection***. C'est le point commun aux deux droites appelé couple-solution du système d'équations.

La **résolution graphique** d'un système d'équations consiste à rechercher les ***coordonnées*** du point commun aux deux droites du système, si ce point existe.

Revenons à M. Touchatou qui complète la dernière étape de cette étude.

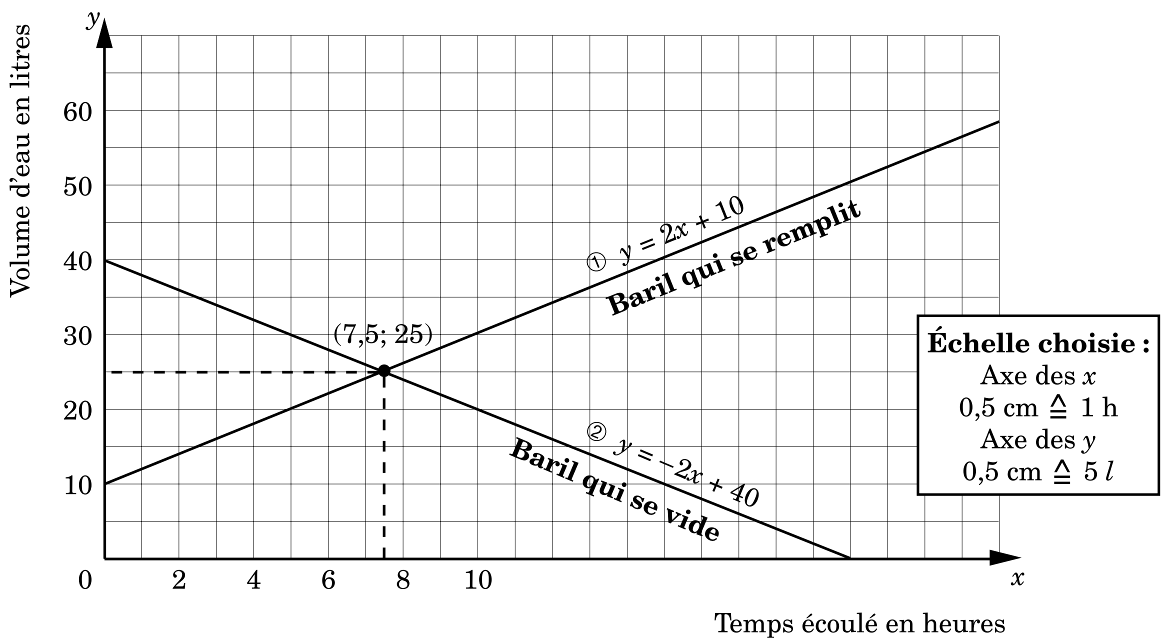
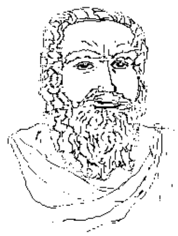


Fig. 1.3 Graphique de M. Touchatou

M. Touchatou peut « lire » sur le graphique représentant son système d'équations les coordonnées du point d'intersection des deux droites. Le couple de coordonnées (7,5; 25) est le **couple-solution du système** puisqu'il vérifie à la fois l'équation ① et l'équation ②. De plus, c'est le **seul** couple-solution du système puisque c'est le seul endroit où les deux droites se coupent, c'est-à-dire, le seul endroit où les variables x et y prennent les mêmes valeurs simultanément dans les deux équations.

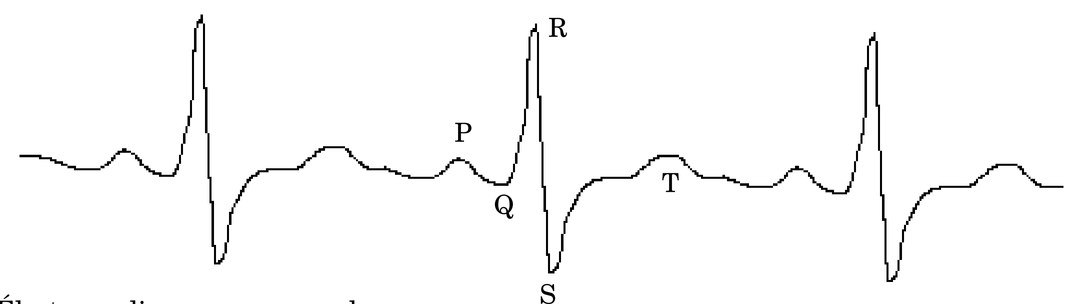
Il peut donc affirmer, preuve à l'appui, que les deux barils contiendront la même quantité d'eau, soit 25 litres, après que $7\frac{1}{2}$ heures se seront écoulées. C'est ce que montre le couple (7,5; 25).



Saviez-vous que...

... graphique, graphe ou graphisme proviennent du même verbe grec, *graphein*, c'est-à-dire écrire? Les graphiques sont des représentations ou des illustrations de données sur un plan, c'est-à-dire une forme d'écriture permettant de transmettre des informations. Nous les retrouvons dans des domaines aussi variés que la médecine, l'économie, la météorologie, etc.

L'électrocardiographie, par exemple, est l'enregistrement graphique (*graphie*) de l'activité électrique (*électro*) du muscle cardiaque (*cardio*).



Électrocardiogramme normal
P, onde de l'oreillette;
QRS, complexe ventriculaire;
T, onde de repolarisation.

Fig. 1.4 Électrocardiogramme

Le volume quotidien des transactions du marché boursier au cours d'une période donnée, résumé dans le graphique de la figure 1.5, en constitue un autre exemple.

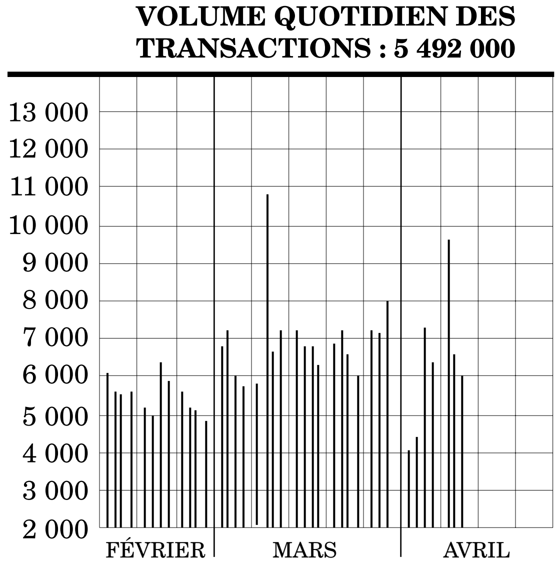
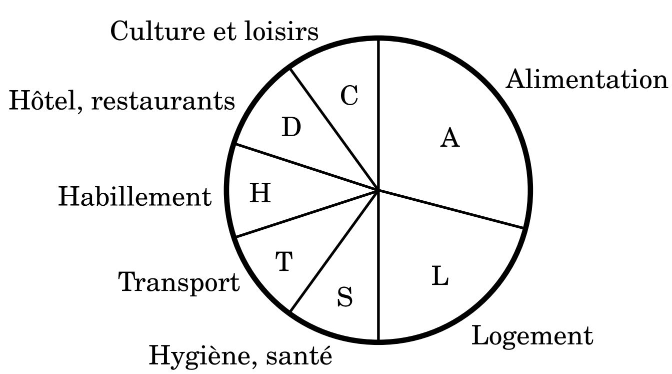


Fig. 1.5 Transactions au maché boursier*

*Source : *La Presse*, 16 avril 1988

Un autre type de graphique, circulaire celui-là, sert à représenter la répartition d'un budget familial par «pointes de tarte». Il est couramment utilisé dans les médiums écrits ou électroniques.



A :	28,4 %
H :	10,0 %
L :	20,7 %
S :	11,8 %
T :	10,3 %
C :	8,8 %
D :	10,0 %
	100 %

Fig. 1.6 Un budget familial type

Exercice 1.2

1. Soit le système d'équations ① $5x - 3y = 14$ et ② $2x + y = 10$.

   a) Trouvez au moins trois couples-solutions pour chaque équation en dressant le tableau de valeurs de chacune.

   ①　　　　　　　　　　②

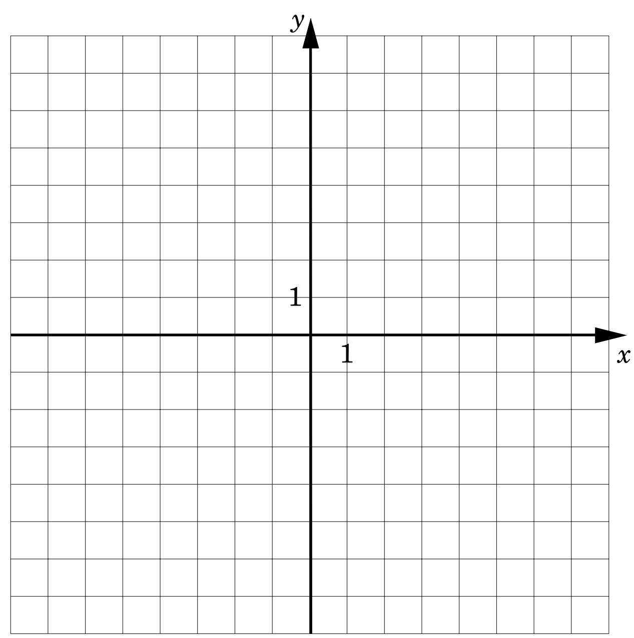
   ①

x	y

   ②

x	y

   b) Situez sur le plan cartésien suivant les points correspondants à ces couples et tracez les deux droites qui représentent ce système d'équations.



c) Quelles sont les coordonnées du point de rencontre des deux droites?

....

d) Démontrez que le couple correspondant au point de rencontre est un couple-solution pour chacune des équations du système.

① $5x - 3y = 14$ ② $2x + y = 10$

Pour *résoudre* graphiquement un système d'équations du premier degré à deux variables, nous devons :

1° transformer chacune des équations du système sous la forme $y = mx + b$;

2° calculer au moins trois couples-solutions pour chacune des équations et dresser un tableau de valeurs;

3° représenter graphiquement chaque équation dans un même plan cartésien;

4° identifier le point d'intersection des deux droites, s'il existe;

5° déterminer la solution du système d'équations.

N.B. – Il est recommandé de vérifier la solution du système en remplaçant les variables x et y par chacune des valeurs trouvées dans les équations originales.

N'y a-t-il toujours qu'une seule solution à un système d'équations? Question intéressante, n'est-ce pas! Toutefois, la réponse n'est pas évidente. Observons les exemples suivants.

Exemple 1

Soit le système d'équations suivant.

$$① \; 2x - y = -5$$
$$② \; 2x - y = 3$$

1° Transformons les équations du système sous la forme $y = mx + b$.

① $2x - y = -5$
$-y = -2x - 5$
$y = 2x + 5$

② $2x - y = 3$
$-y = -2x + 3$
$y = 2x - 3$

2° Calculons au moins trois couples-solutions pour chacune des équations et dressons les tableaux de valeurs.

①

x	y
-2	1
0	5
1	7

②

x	y
0	-3
2	1
5	7

3° Représentons graphiquement chaque équation dans un même plan cartésien.

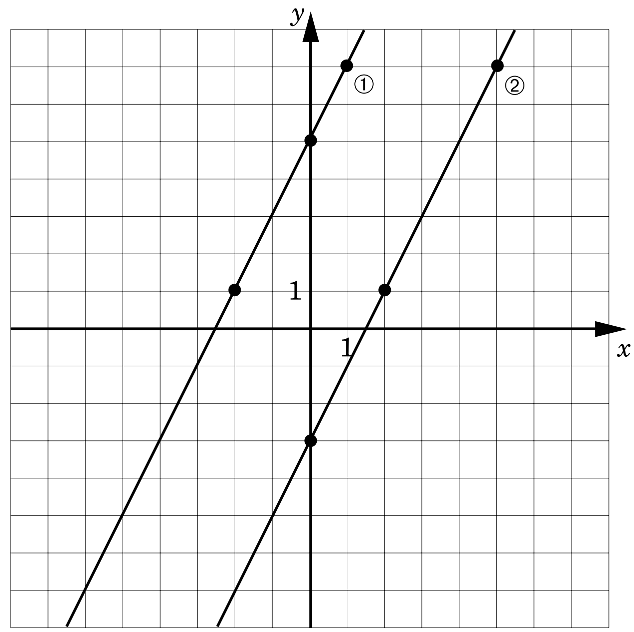


Fig. 1.7 Droites représentant le système d'équations
① $2x - y = -5$ et ② $2x - y = 3$

4° Identifions le point d'intersection des deux droites, s'il existe.

Il n'y a aucun point d'intersection : les deux droites sont ***parallèles***.

5° Déterminons la solution du système d'équations.

Ce système n'a **aucune** solution puisqu'il n'existe aucun point commun aux deux droites représentées.

Il existe donc des systèmes pour lesquels il n'y a **aucune solution commune**. Ces systèmes sont constitués par des **droites parallèles et distinctes**.

Voyons maintenant un autre cas où une solution unique ne peut être trouvée.

Exemple 2

Soit le système d'équations suivant.

$$① \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1$$

$$② \quad x + \frac{y}{3} = 2$$

1° Transformons les équations du système sous la forme $y = mx + b$.

$$\begin{aligned} ① \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{6} &= 1 \\ \frac{3x}{6} + \frac{y}{6} &= \frac{6}{6} \\ 3x + y &= 6 \\ y &= -3x + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ② \quad x + \frac{y}{3} &= 2 \\ \frac{3x}{3} + \frac{y}{3} &= \frac{6}{3} \\ 3x + y &= 6 \\ y &= -3x + 6 \end{aligned}$$

Comme vous pouvez le constater, ces deux équations sont **identiques**.

2° Calculons au moins trois couples-solutions et dressons le tableau de valeurs.

N.B. – Un seul tableau de résultats est ici nécessaire puisque les deux équations du système sont identiques.

① et ②

x	y
0	6
1	3
2	0

3° Représentons graphiquement chaque équation dans un même plan cartésien.

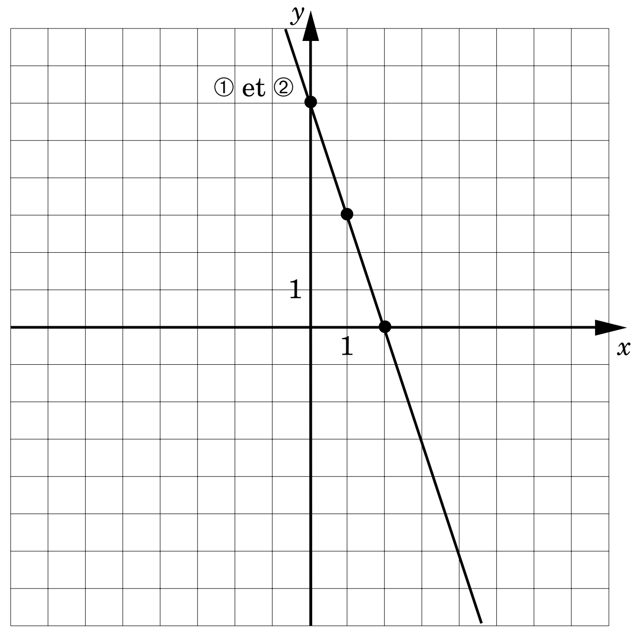


Fig. 1.8 Droites confondues représentant le système d'équations
① $\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1$ et ② $x + \frac{y}{3} = 2$

4° Identifions le point d'intersection des deux droites, s'il existe.

Il y a une infinité de points d'intersection puisque ces deux droites se confondent.

5° Déterminons la solution du système d'équations.

Ce système a une **infinité** de solutions puisque les deux droites sont superposées.

Il existe donc des systèmes pour lesquels il y a **une infinité de solutions**. Ces systèmes sont constitués par des **droites parallèles et *confondues*.**

Résumons-nous!

Dans la résolution graphique d'un système d'équations du premier degré à deux variables, trois situations peuvent se présenter :

1° les droites sont sécantes et, en ce cas, la solution de ce système est un couple-solution unique;

2° les deux droites sont parallèles et distinctes, et dans ce cas, il n'y a aucune solution;

3° les deux droites sont parallèles et confondues, et dans ce cas, il existe une infinité de solutions.

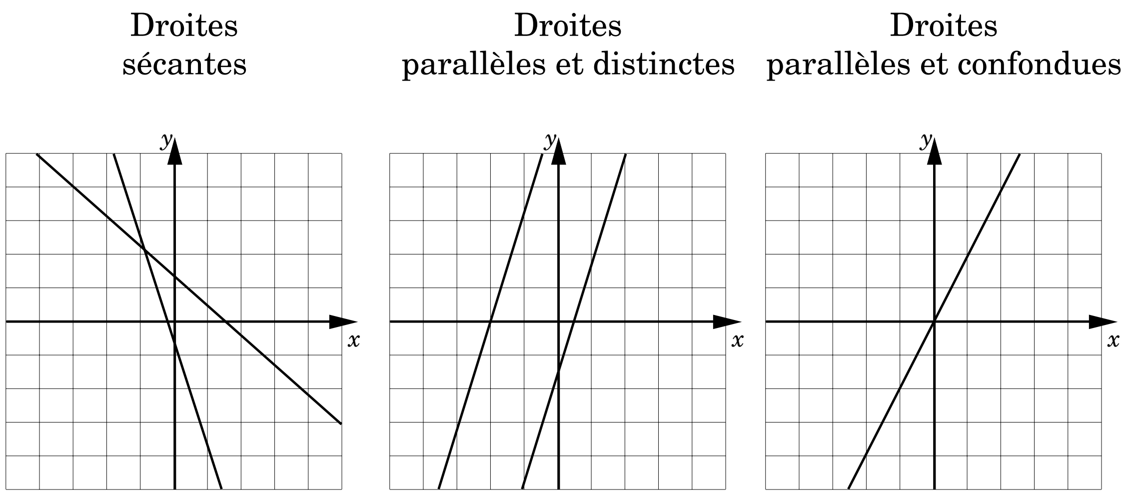


Fig. 1.9 Divers types de droites représentant des systèmes d'équations

Voyons maintenant si vous saurez les reconnaître dans les exercices de consolidation suivants.

1.2 EXERCICES DE CONSOLIDATION

1. Transformez chacune des équations suivantes sous la forme $y = mx + b$

a) $x + \frac{y}{2} = 6$

b) $\frac{x-2}{3} - \frac{y-2}{2} = -2$

c) $x - 1 = \frac{y}{2}$

d) $0{,}15x + 0{,}3y = 1{,}2$

e) $3(x - 3) + 4 = 5(y - 2) + 3x$

2. Résolvez graphiquement les systèmes d'équations du premier degré à deux variables ci-dessous en suivant la démarche proposée dans ce sous-module. Déterminez-en la solution ainsi que les types de droites auquel appartient ce système.

a) ① $2x - 5y = 20$
② $3x + 2y = 11$

1° ①　　②

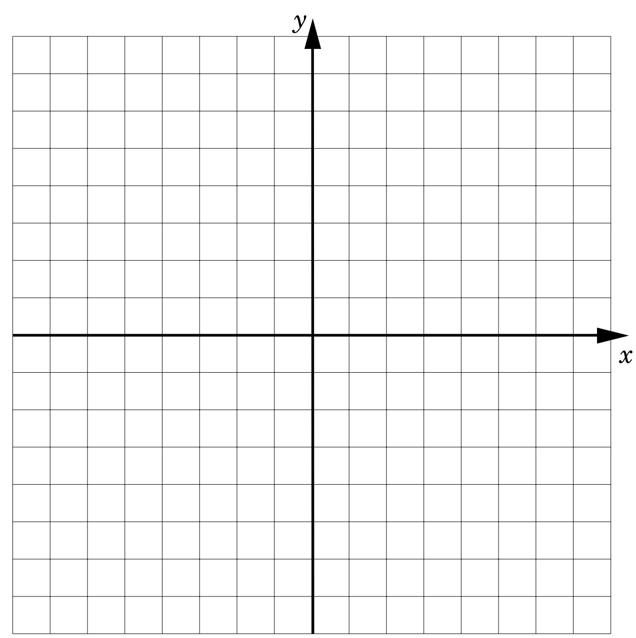
2° Tableaux de valeurs　　3° Graphique

①

x	y

②

x	y



4° ....

5° • Couple-solution : ....

• Type de droites : ....

b) ① $22x - 6y = 24$

② $6y - 15x = -3$

1° ① ②

2° Tableaux de valeurs

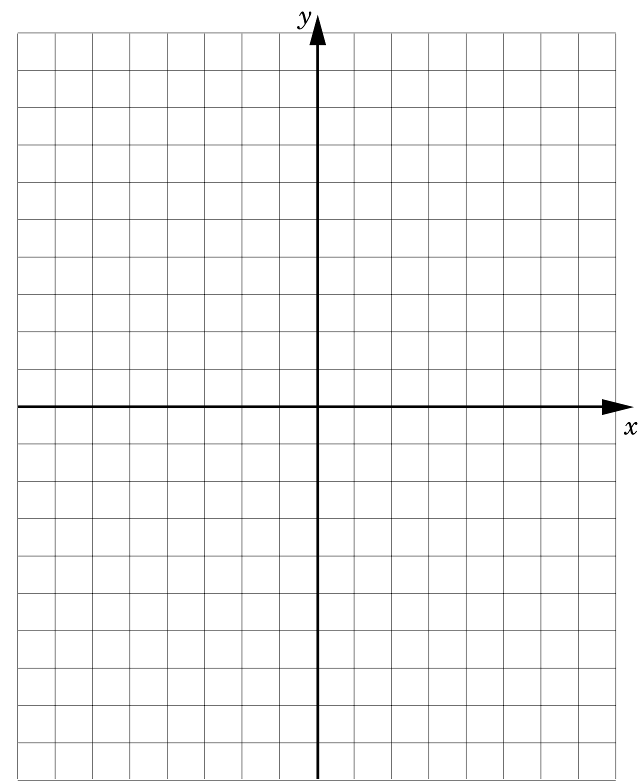
①

x	y

②

x	y

3° Graphique



4° ....

5° • Couple-solution : ....

• Type de droites : ....

c) ① $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 7$

② $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 7$

1° ①

②

2° Tableaux de valeurs

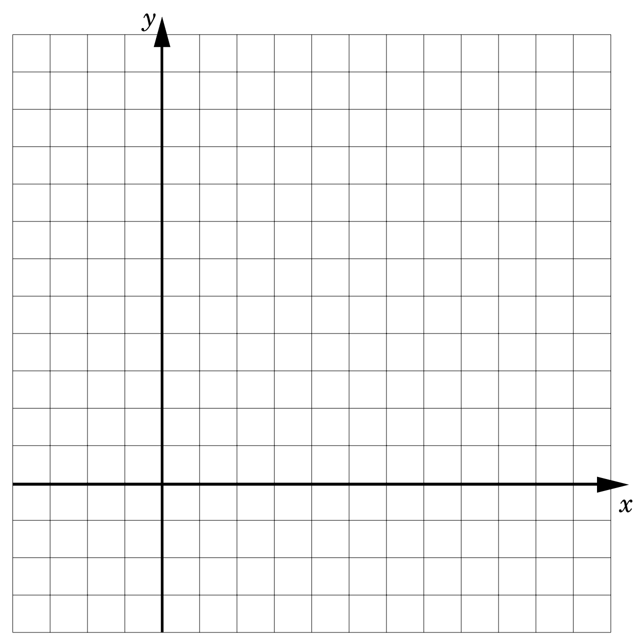
①

x	y

②

x	y

3° Graphique



4° ....

5° • Couple-solution : ....

• Type de droites : ....

d) ① $-0{,}5x + y - 3 = 0$

② $x - 2y + 6 = 0$

1° ① ②

2° Tableaux de valeurs

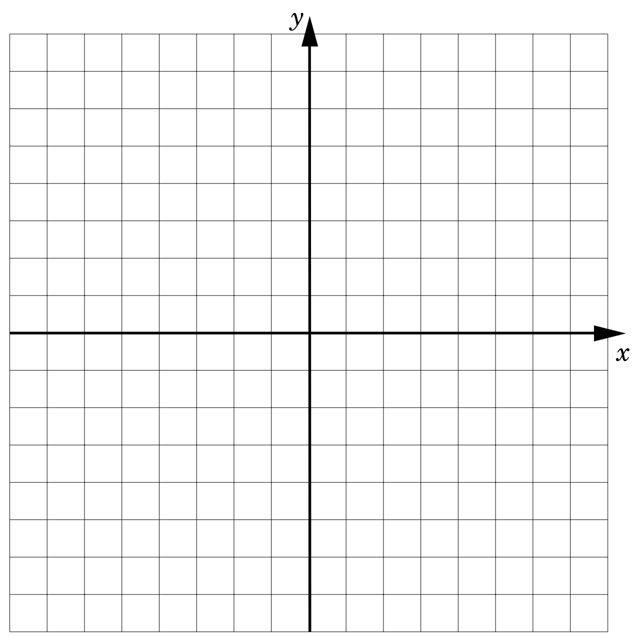
①

x	y

②

x	y

3° Graphique



4° ....

5° • Couple-solution : ....

• Type de droites : ....

e) ① $\frac{x}{2} + y - 2 = 0$

② $\frac{x}{2} + y - 5 = 0$

1° ①   ②

2° Tableaux de valeurs

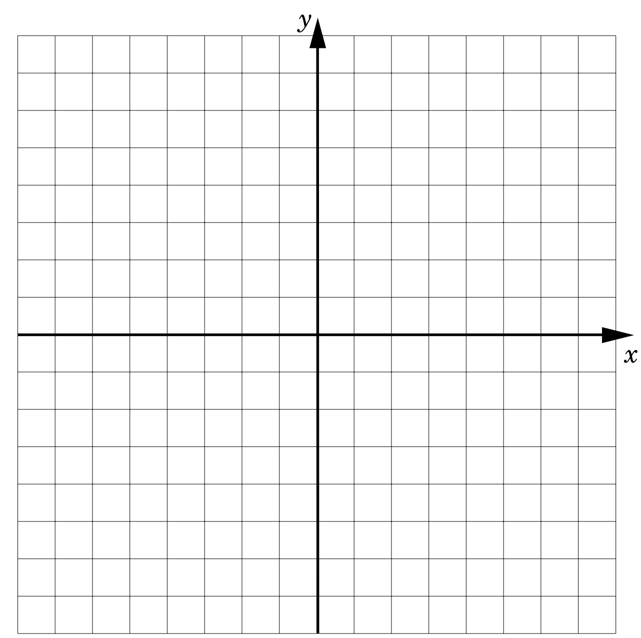
①

x	y

②

x	y

3° Graphique



4° ....

5° • Couple-solution : ....

• Type de droites : ....

f) ① $4x + y = 19$

② $y = 5$

1° ①   ②

2° Tableaux de valeurs

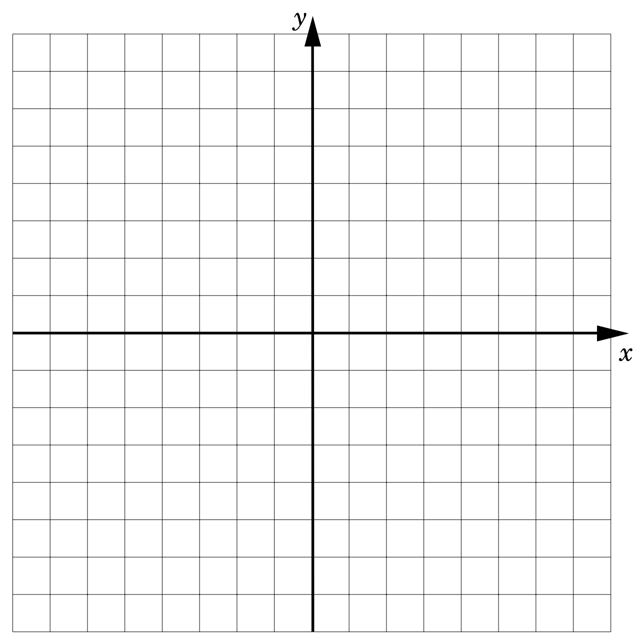
①

x	y

②

x	y

3° Graphique



4° ....

5° • Couple-solution : ....

• Type de droites : ....

g) ① $x = 4$

② $2y = 6$

1° ① ②

2° Tableaux de valeurs

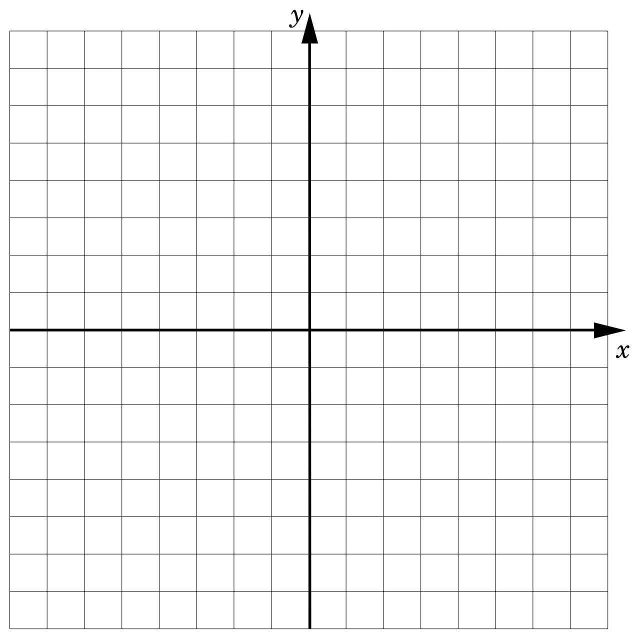
①

x	y

②

x	y

3° Graphique



4° ....

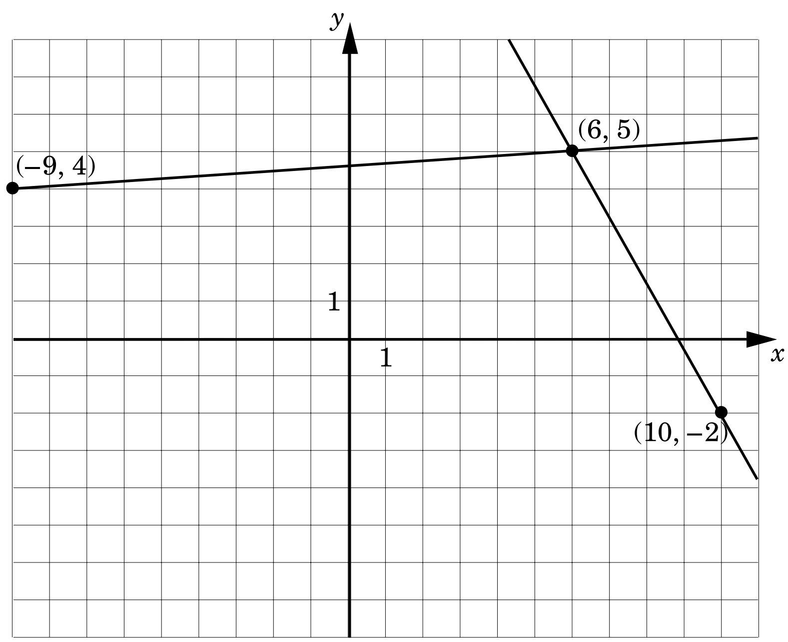
5° • Couple-solution : ....

• Type de droites : ....

3. Identifiez dans chaque cas, parmi les trois systèmes d'équations donnés, le système qui correspond au graphique placé à droite des systèmes. Inscrivez la réponse au bas de la liste des systèmes en notant la lettre correspondant au système choisi.

a) A : ① $\frac{2x}{3} + \frac{y}{5} = 3$ B : ① $-6x + \frac{y}{6} = -29$ C : ① $\frac{7x}{2} + 2y = 31$

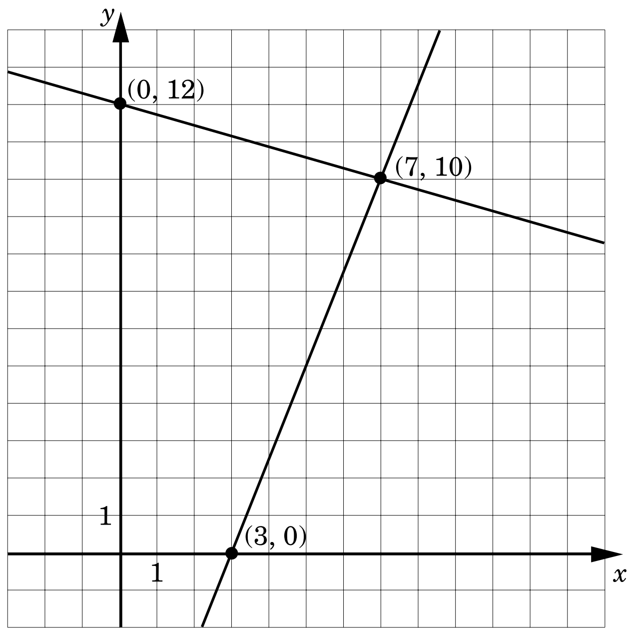
② $x - 2y = 4$ ② $2x - \frac{y}{3} = 8$ ② $\frac{x}{3} - 5y = -23$



Le graphique de la figure ci-dessus correspond au système d'équations décrit en ....

b) A : ① $0{,}5x + 2y = 19$ B : ① $\frac{x}{2} - \frac{y}{5} = 1\frac{1}{2}$ C : ① $\frac{x}{10} - \frac{y}{7} = 0$

② $\frac{1}{5}x - \frac{1}{7}y = 1$ ② $\frac{x}{7} + \frac{y}{2} = 6$ ② $x - y = -3$



Le graphique de la figure ci-dessus correspond au système d'équations décrit en ....

1.3 ACTIVITÉ DE SYNTHÈSE

1. Complétez les phrases suivantes en inscrivant sur les pointillés le ou les termes volontairement omis.

   Un système d'équations du premier degré à deux variables est un ensemble d'au moins .... équations du premier degré à .... variables, pour lesquelles nous recherchons la ou les .... communes.

   Ce système est représenté graphiquement par autant de .... que nous avons d'équations.

   La solution du système est le point .... de ces droites. Il y a .... cas possibles de systèmes.

   Un système de droites .... possède une solution unique. Dans ce cas, la solution est donnée par un .... solution représentant le point .... des deux droites du graphique.

   Un système de droites .... et .... n'a aucune solution.

   Un système de droites .... et .... possède une infinité de .... communs. Dans ce cas, la solution est donnée par l'ensemble de .... les points communs à ces .... droites.

2. Complétez l'ordinogramme des étapes de résolution graphique d'un système d'équations du premier degré à deux variables en décrivant chacune des opérations de la colonne de gauche.

① $x + y - 5 = 0$
② $9x - 2y - 23 = 0$

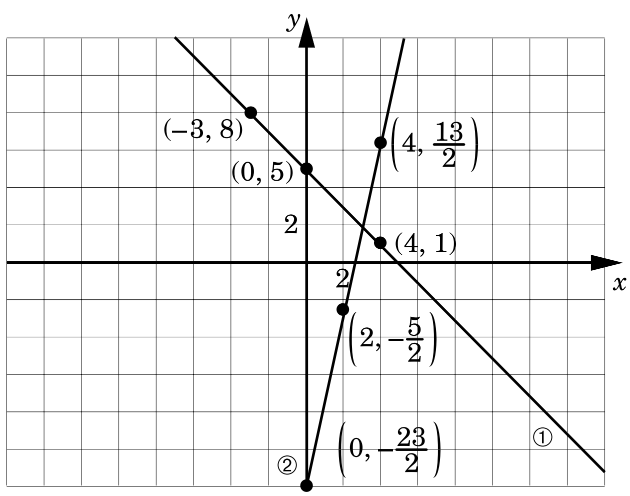
① $y = -x + 5$ ② $y = \dfrac{9x}{2} - \dfrac{23}{2}$

①

x	y
–3	8
0	5
4	1

②

x	y
0	$-\dfrac{23}{2}$
2	$-\dfrac{5}{2}$
4	$\dfrac{13}{2}$



Ces deux droites se coupent au point (3, 2).

Solution : (3, 2).
Type de droites : droites sécantes.

1°

2°

3°

4°

5°

1.4 LA PAGE DES MATHOPHILES

Le lièvre et la tortue, une fable connue

Connaissez-vous la fable du lièvre et de la tortue? Ils se préparent à une course célèbre. Sûr de lui, le lièvre laisse à son amie une avance de 2 000 mètres; il sait qu'il court beaucoup plus vite qu'elle. La tortue progresse au rythme de 50 m / min, le lièvre fait 350 m / min. Voici le tableau de valeurs représentant leurs temps respectifs.

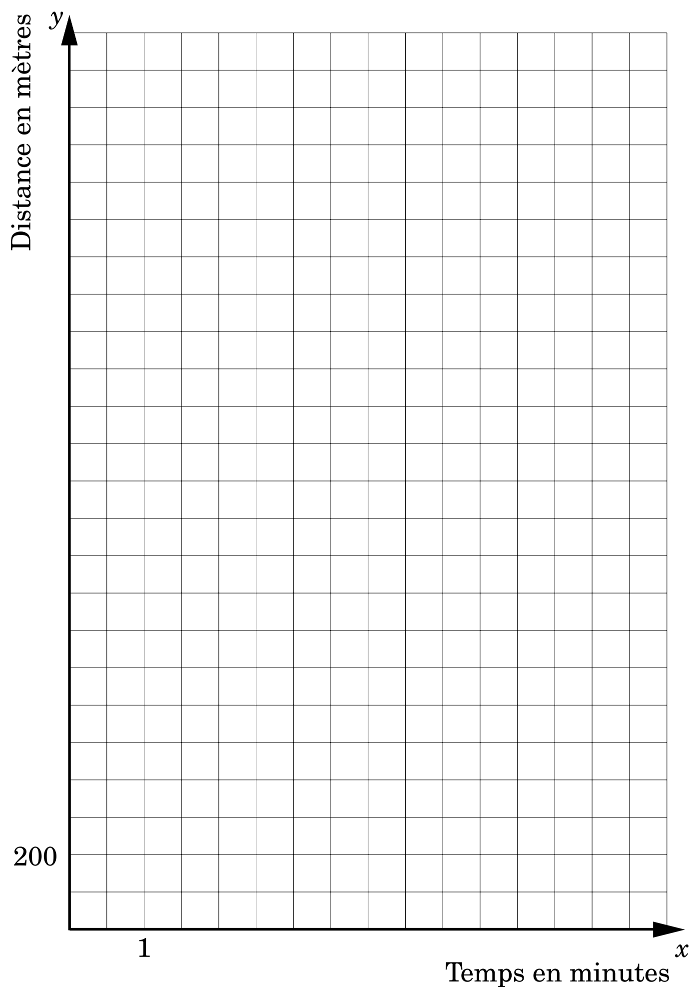
Lièvre :

temps en min	0	2	4
distance franchie en m	0	700	

Tortue :

temps en min	0	2	4
distance franchie en m	2 000	2 100	

Quand le lièvre dépassera-t-il la tortue? Complétez le tableau de valeurs ci-dessus et utilisez le plan cartésien qui suit pour déterminer ce moment.



Échelle choisie :
Axe des x
0,5 cm ≙ 0,5 min
Axe des y
0,5 cm ≙ 100 m

Fig. 1.10 Le lièvre et la tortue

Quelles sont les coordonnées du point de rencontre? ....

À quelle distance du départ le lièvre dépassera-t-il la tortue? ....

Corrigé