GUIDE D'APPRENTISSAGE

MATHÉMATIQUE FBD

RÉSOLUTION

MAT-4151-1 CST

MODÉLISATION ALGÉBRIQUE ET GRAPHIQUE

EN CONTEXTE GÉNÉRAL

CONFORME AU NOUVEAU PROGRAMME

sofad

GUIDE D'APPRENTISSAGE

MATHÉMATIQUE FBD

RÉSOLUTION

MAT-4151-1 CST

MODÉLISATION ALGÉBRIQUE ET GRAPHIQUE

EN CONTEXTE GÉNÉRAL

sofad

Gestion de projets :
Nancy Mayrand
Isabelle Tanguay

Conception pédagogique :
Jean-Claude Hamel

Rédaction de contenus :
Jean-Claude Hamel
Mélanie Tremblay
(*Consolidation* et *Intégration*)
Eric Rouillard
(*Consolidation* et *Intégration*)

Révision pédagogique :
Jonathan Lafond
Louise Maurice

Révision docimologique :
Steeve Pinsonneault

Révision scientifique :
Hélène Décoste
Jonathan Lafond
Déborah Nadeau Parent

Révision linguistique :
Ginette Choinière
Nadia Leroux
Johanne St-Martin

Conception et validation des illustrations :
Hélène Décoste
Déborah Nadeau Parent

Conception graphique et couverture :
Mylène Choquette

Infographie :
Alphatek

Production des illustrations :
Alphatek

Lecture d'épreuves :
Marie-Chantal Beaulieu
Nathalie Bernard
Nicole Perreault
Karl-Philippe Tremblay

Correction d'épreuves :
Ginette Choinière
Laëtitia Gagnon
Johanne St-Martin

Cet ouvrage est en partie financé par le Ministère de l'Éducation, de l'Enseignement supérieur du Québec.

Dépôt légal – 2017
Bibliothèque et Archives nationales du Québec
Bibliothèque et Archives Canada
ISBN : 978-2-89493-651-1 (imprimé)
ISBN : 978-2-89493-652-8 (PDF)

Juin 2017

Table des matières

Cet aperçu contient :
- la table des matières;
- l'introduction;
- le chapitre 1.

CHAPITRE 1

Modéliser l'activité physique
Les fonctions définies par parties, en escalier et périodiques

CHAPITRE 2

Calculer avant d'acheter
Les fonctions quadratiques et exponenti

CHAPITRE 3

Bien gérer son entreprise
Les systèmes d'équations et les droites

COMPLÉMENTS

PRÉSENTATION DU GUIDE D'APPRENTISSAGE

Bienvenue dans le guide d'apprentissage du cours ***Modélisation algébrique et graphique en contexte général***. Ce cours, le premier de la séquence **Culture, société et technique** en **4e secondaire**, a pour but de développer votre habileté à traiter des situations qui requièrent une représentation algébrique ou graphique exprimant un lien de dépendance entre des quantités. À cette fin, vous serez amené à étudier cinq nouvelles fonctions réelles, soit les fonctions :

- définie par parties ;
- en escalier ;
- périodique ;
- quadratique ;
- exponentielle.

Vous compléterez votre formation en approfondissant vos connaissances sur :

- les propriétés des droites dans un plan cartésien ;
- la résolution de systèmes d'équations.

Vous serez amené à utiliser diverses stratégies de résolution afin de comprendre et de modéliser des situations-problèmes. Votre aptitude à déployer un raisonnement mathématique sera sollicitée. Puis, vous aurez à décrire vos démarches de résolution avec clarté et rigueur à l'aide du langage mathématique.

Vous êtes maintenant convié à réaliser les activités d'apprentissage qui vous sont proposées dans les trois chapitres de ce guide et à enrichir vos connaissances en algèbre.

Portailsofad.com

Sur portailsofad.com, des capsules vidéo, des activités TIC et des versions imprimables des ressources complémentaires au guide de la collection RÉSOLUTION vous accompagneront tout au long de vos apprentissages.

COMPOSANTES D'UN CHAPITRE

La démarche d'apprentissage proposée dans un chapitre permet de progresser en réinvestissant les apprentissages réalisés d'une section à l'autre. Le schéma qui suit illustre cette démarche et précise l'intention pédagogique de chacune des sections.

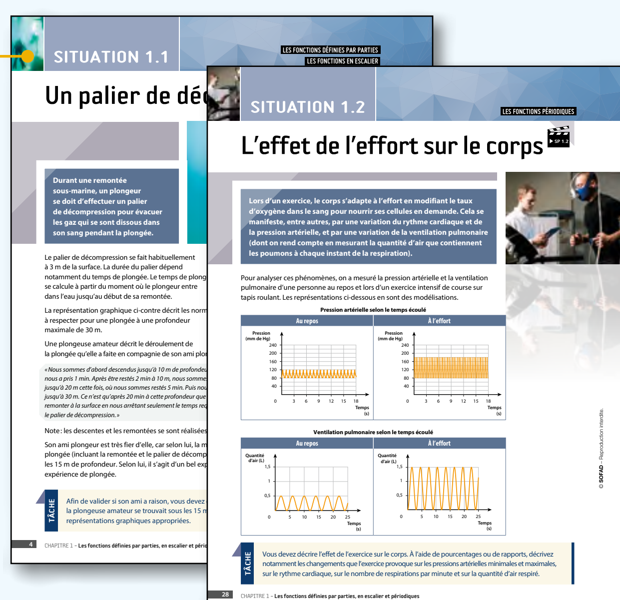
OUVERTURE DU CHAPITRE

La première page décrit le contexte et la thématique qui serviront de trame de fond à l'acquisition des nouveaux savoirs abordés dans le chapitre.

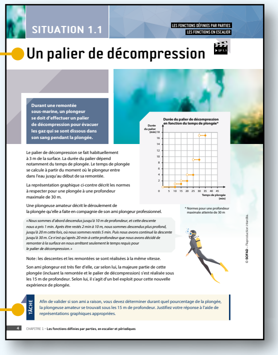
Une table des matières accompagne cette première page. Les savoirs à acquérir y sont présentés pour chacune des *Situations*, ainsi que le thème des situations-problèmes.

SITUATIONS

De manière générale, il y a deux *Situations* d'apprentissage par chapitre. La démarche proposée dans ces situations permet d'acquérir de nouveaux savoirs et de développer des compétences mathématiques dans des contextes réels, réalistes ou purement mathématiques.



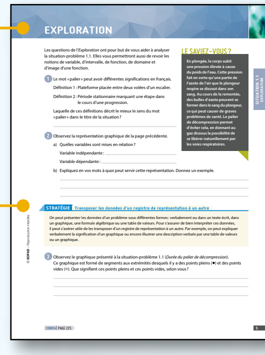
PHASES D'UNE SITUATION


SITUATION 1.1
Un palier de décompression

SITUATION–PROBLÈME

Liée au thème principal du chapitre, cette page décrit brièvement le contexte de la situation-problème, ainsi que les données nécessaires à sa résolution.

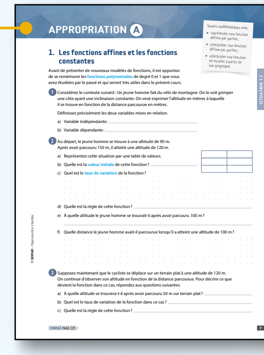
Un encadré décrit la tâche que vous aurez à réaliser plus loin dans la section *Résolution*. Cette tâche est le point de départ vous permettant d'acquérir de nouveaux savoirs en vue de résoudre la situation-problème.


EXPLORATION

EXPLORATION

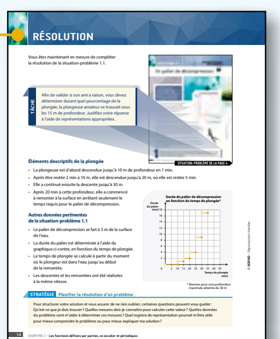
Cette section vous invite à analyser les données de la situation-problème, à déterminer les savoirs que vous possédez et ceux que vous devez acquérir pour réaliser la tâche.

Son questionnement vous guidera vers une stratégie de résolution de problème.


APPROPRIATION A

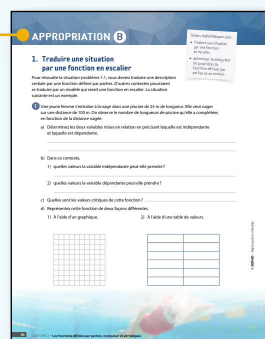
APPROPRIATION A

C'est ici que sont assimilés les savoirs nécessaires pour résoudre la situation-problème. Chaque *Appropriation* stimule la réflexion avant la présentation de nouveaux savoirs mathématiques.


RÉSOLUTION

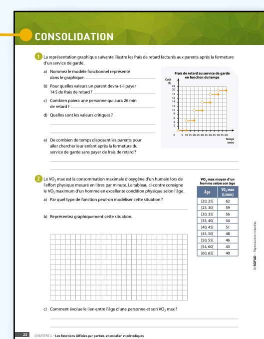
RÉSOLUTION

Arrivé à cette section, vous devriez avoir en votre possession toutes les connaissances et les stratégies essentielles à la résolution de la situation-problème énoncée au début de la situation.


APPROPRIATION B

APPROPRIATION B

Dans cette deuxième appropriation, vous acquerrez de nouveaux savoirs prescrits au programme en lien avec ceux vus dans l'*Appropriation A*.


CONSOLIDATION

CONSOLIDATION

Cette section vous permettra de consolider les savoirs mathématiques acquis dans les *Appropriations A* et *B*. Tout comme la section *Intégration*, cette *Consolidation* permet aussi de développer les compétences mathématiques.

EN FIN DE CHAPITRE...

SAVOIRS EN RÉSUMÉ

Cette section résume tous les savoirs *À retenir* sous forme de phrases trouées. On vous invite à remplir les informations manquantes.

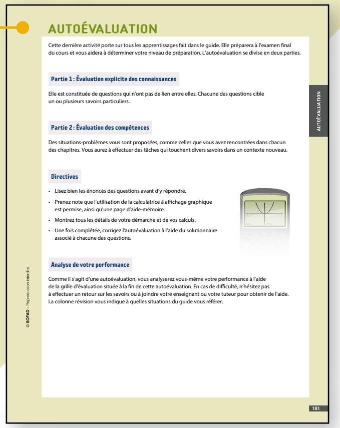
INTÉGRATION

Dans cette section comprenant des exercices et des situations complexes, vous devrez appliquer les savoirs vus dans ce chapitre.

SAÉ

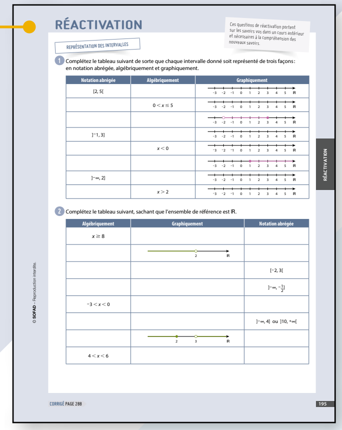
La *SAÉ* est une tâche complexe élaborée selon le modèle des évaluations de sanction. Elle est accompagnée d'une grille d'évaluation des compétences.

COMPLÉMENTS



AUTOÉVALUATION

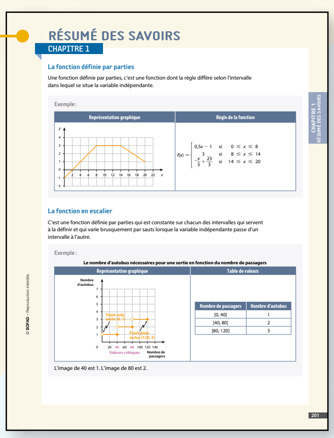
Une *Autoévaluation* est présentée en première partie de ces *Compléments*. Elle permet d'évaluer vos connaissances acquises et les compétences mathématiques développées tout au long du cours. Vous pourrez ainsi déterminer les savoirs que vous maîtrisez et ceux pour lesquels une révision s'impose avant de passer à l'*Activité notée synthèse*.



RÉACTIVATION

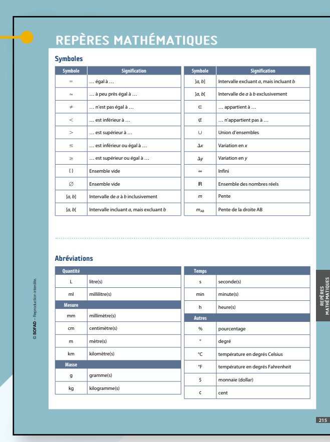
Au cours des *Situations*, vous croiserez des rubriques *Rappel* présentant des savoirs vus dans un cours antérieur et nécessaires à la compréhension du nouveau savoir ou à la résolution de la situation en cours.

Cette *Réactivation* permettra de réviser, à l'aide d'exercices, les règles et les concepts mathématiques qui font l'objet d'un *Rappel*.



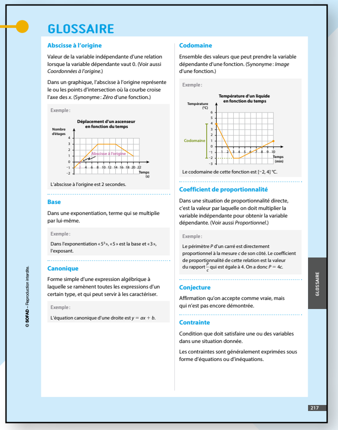
RÉSUMÉ DES SAVOIRS

C'est dans cette section que la version complète des *Savoirs en résumé* se situe. Une version imprimable est aussi disponible en ligne.



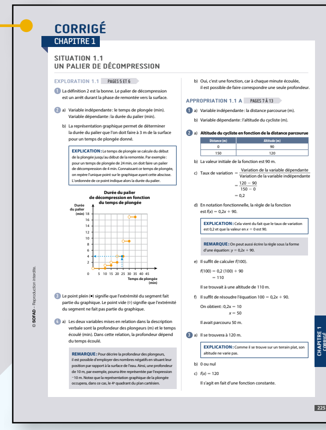
REPÈRES MATHÉMATIQUES

Dans cette section, on présente des symboles mathématiques utilisés dans le guide et certaines abréviations d'unités de mesure. Des formules mathématiques en rappel y sont aussi offertes.


GLOSSAIRE

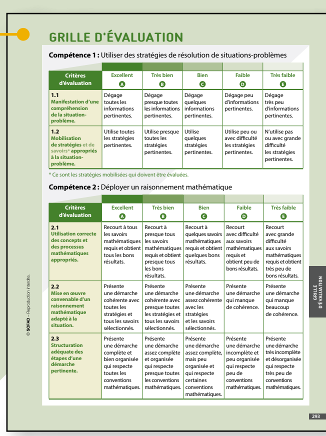
GLOSSAIRE

Les mots et expressions **écrits en bleu** dans le texte courant sont définis dans le *Glossaire*.


CORRIGÉ
CHAPITRE 1

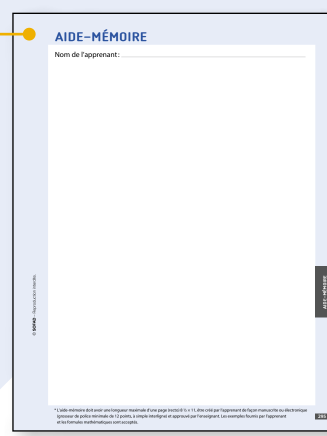
CORRIGÉ

Vers la fin du guide, vous repérerez le *Corrigé*. Il a été conçu non seulement pour valider vos réponses, mais aussi pour vous accompagner dans vos apprentissages. Il contient les réponses aux questions, des explications détaillées sur la démarche ou le raisonnement à mettre en œuvre.


GRILLE D'ÉVALUATION

GRILLE D'ÉVALUATION

Une *Grille d'évaluation* des compétences vous est offerte à la fin du guide. À la suite de la résolution d'une *SAÉ*, vous êtes invité à vous évaluer à l'aide de cette grille. Vous pourrez alors compléter la version abrégée située dans le bas de chaque *SAÉ*.


AIDE-MÉMOIRE
Nom de l'apprenant :

AIDE-MÉMOIRE

Vous pouvez vous constituer un aide-mémoire. Une feuille détachable est prévue à cet effet à la fin du guide. Il vous est permis d'utiliser cet aide-mémoire lors de l'épreuve finale.

RUBRIQUES ET PICTOGRAMMES

LE NUAGE DE POINTS *

Réfère , s'il y a lieu, à un savoir facultatif. Il est reconnaissable par son fond tramé plus pâle.

▶ SP 1.1

Invite à visionner une capsule vidéo portant sur la situation-problème.

TÂCHE

Afin de valider si son ami a raison, vous devez déterminer durant…

Présente la tâche à exécuter dans le cadre de votre situation-problème.

RAPPEL

EXERCICES DE RÉACTIVATION
PAGE 195, NUMÉROS 1 ET 2

La représentation des…

Un **intervalle** est un ensemble…

Exemple :

L'intervalle des nombres de 2…

Réfère à des connaissances que vous avez acquises dans des cours antérieurs et à des exercices de réactivation en lien avec ce *Rappel*.

À RETENIR

Les fonctions en escalier

Une fonction en escalier a la…

Exemple :

L'intervalle des nombres de 2…

Présente les savoirs mathématiques que vous devez maîtriser. Ce sont les savoirs prescrits par le programme d'étude.

STRATÉGIE Interpréter une…

Pour bien saisir la signification d'une représentation graphique, il est essentiel…

Présente des stratégies de résolution de problème qui peuvent s'appliquer dans diverses situations.

LE SAVIEZ-VOUS ?

Dans la réalité, les oscillations d'un pendule ont tendance à s'amoindrir à cause du…

Permet de découvrir des notes historiques et culturelles liées aux concepts mathématiques à l'étude.

ASTUCE

Les graduations des axes de la représentation graphique ne permettent pas toujours de déterminer avec précision la longueur…

Propose une astuce qui simplifie le travail ou offre une façon différente de traiter le problème ou d'appliquer le concept à l'étude.

ATTENTION !

Assurez-vous que les intervalles qui délimitent les parties de la fonction dans votre règle sont bien…

Met en garde sur des pièges à éviter ou des exceptions qui peuvent s'appliquer au concept à l'étude.

TIC

L'activité TIC 1.2.1 en ligne vous permettra d'observer les cycles et la période d'une fonction périodique. Cette activité est accessible sur portailsofad.com.

Incite à effectuer une activité en ligne (GeoGebra ou calculatrice à affichage graphique) qui vous fera explorer la notion travaillée en utilisant des outils technologiques.

ACTIVITÉ NOTÉE

Vous devez maintenant effectuer l'activité notée 1. Elle est accessible sur le site du cours…

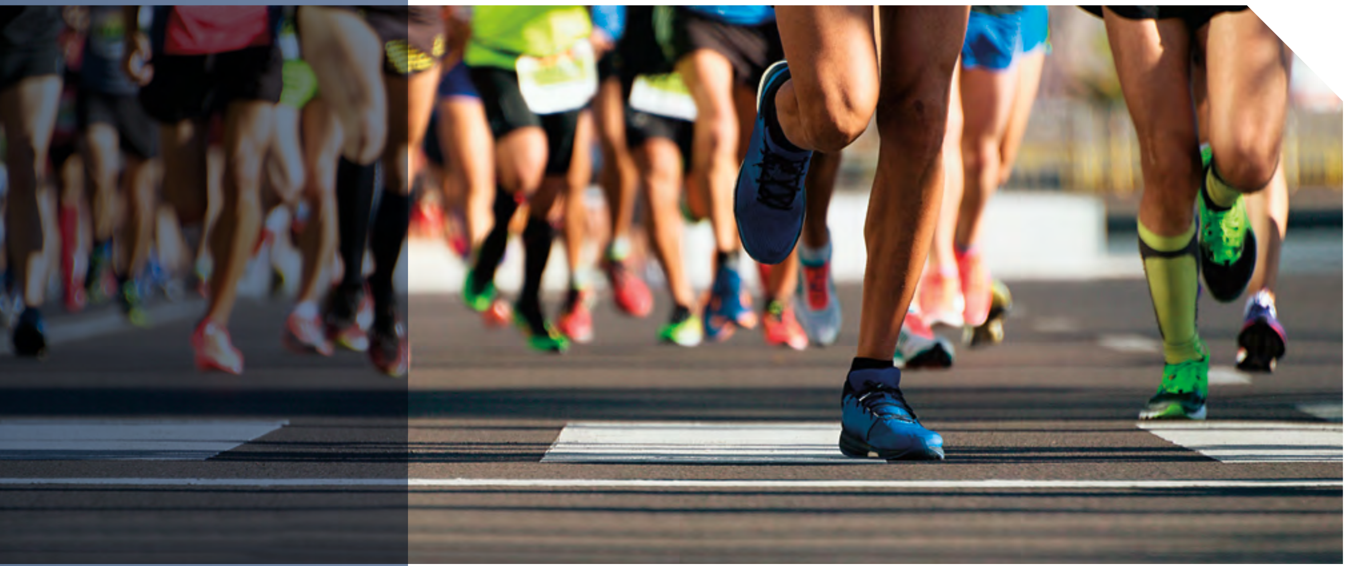
Indique que vous êtes prêt à effectuer l'*Activité notée* prévue pour valider votre compréhension en cours d'apprentissage. L'*Activité notée synthèse* se fait, quant à elle, à la toute fin du cours. Ces activités sont présentées dans des fascicules séparés du guide. Une fois complétée, vous devrez remettre votre travail à votre enseignant ou à votre tuteur qui vous fournira une rétroaction à la suite de sa correction.

CHAPITRE 1

Les fonctions définies par parties, en escalier et périodiques

Modéliser l'activité physique

L'activité physique est un élément essentiel à une vie saine et équilibrée, mais elle comporte parfois quelques dangers. Prenez, par exemple, la plongée sous-marine. Il y a certainement des bienfaits à pratiquer ce sport, dans la mesure où l'on obéit strictement aux normes de sécurité. On ne peut pas plonger à n'importe quelle profondeur et le retour à la surface ne peut pas se faire n'importe comment. De façon générale, tout exercice soutenu a des effets importants sur le corps. Le rythme cardiaque et le rythme respiratoire sont les premiers éléments physiologiques perturbés par l'effort, mais il y en a d'autres, telle la pression artérielle. Le corps est une machine extraordinaire qui s'adapte à bien des situations contraignantes, mais il a aussi ses limites. La modélisation mathématique à l'aide de fonctions réelles permet de mieux comprendre ces phénomènes liés à l'activité physique et à ses effets.



CHAPITRE 1

SITUATION 1.1

LES FONCTIONS DÉFINIES PAR PARTIES
LES FONCTIONS EN ESCALIER

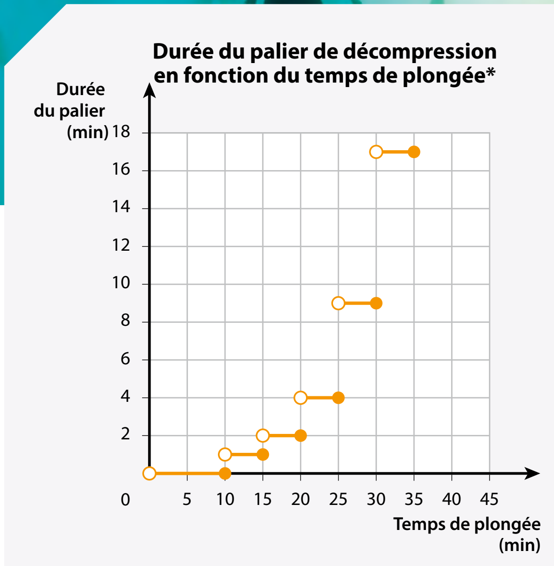
Un palier de décompression

SP 1.1

Durant une remontée sous-marine, un plongeur se doit d'effectuer un palier de décompression pour évacuer les gaz qui se sont dissous dans son sang pendant la plongée.

Le palier de décompression se fait habituellement à 3 m de la surface. La durée du palier dépend notamment du temps de plongée. Le temps de plongée se calcule à partir du moment où le plongeur entre dans l'eau jusqu'au début de sa remontée.

La représentation graphique ci-contre décrit les normes à respecter pour une plongée à une profondeur maximale de 30 m.



* Normes pour une profondeur maximale atteinte de 30 m

Une plongeuse amateur décrit le déroulement de la plongée qu'elle a faite en compagnie de son ami plongeur professionnel.

« Nous sommes d'abord descendus jusqu'à 10 m de profondeur, et cette descente nous a pris 1 min. Après être restés 2 min à 10 m, nous sommes descendus plus profond, jusqu'à 20 m cette fois, où nous sommes restés 5 min. Puis nous avons continué la descente jusqu'à 30 m. Ce n'est qu'après 20 min à cette profondeur que nous avons décidé de remonter à la surface en nous arrêtant seulement le temps requis pour le palier de décompression. »

Note : les descentes et les remontées se sont réalisées à la même vitesse.

Son ami plongeur est très fier d'elle, car selon lui, la majeure partie de cette plongée (incluant la remontée et le palier de décompression) s'est réalisée sous les 15 m de profondeur. Selon lui, il s'agit d'un bel exploit pour cette nouvelle expérience de plongée.

TÂCHE

Afin de valider si son ami a raison, vous devez déterminer durant quel pourcentage de la plongée, la plongeuse amateur se trouvait sous les 15 m de profondeur. Justifiez votre réponse à l'aide de représentations graphiques appropriées.

EXPLORATION

Les questions de l'*Exploration* ont pour but de vous aider à analyser la situation-problème 1.1. Elles vous permettront aussi de revoir les notions de variable, d'intervalle, de fonction, de domaine et d'image d'une fonction.

LE SAVIEZ-VOUS ?

En plongée, le corps subit une pression élevée à cause du poids de l'eau. Cette pression fait en sorte qu'une partie de l'azote de l'air que le plongeur respire se dissout dans son sang. Au cours de la remontée, des bulles d'azote peuvent se former dans le sang du plongeur, ce qui peut causer de graves problèmes de santé. Le palier de décompression permet d'éviter cela, en donnant au gaz dissous la possibilité de se libérer naturellement par les voies respiratoires.

1 Le mot « palier » peut avoir différentes significations en français.

Définition 1 : Plateforme placée entre deux volées d'un escalier.

Définition 2 : Période stationnaire marquant une étape dans le cours d'une progression.

Laquelle de ces définitions décrit le mieux le sens du mot « palier » dans le titre de la situation ?

____

2 Observez la représentation graphique de la page précédente.

a) Quelles variables sont mises en relation ?

Variable indépendante : ______________________________

Variable dépendante : ______________________________

b) Expliquez en vos mots à quoi peut servir cette représentation. Donnez un exemple.

____

____

____

STRATÉGIE Transposer les données d'un registre de représentation à un autre

On peut présenter les données d'un problème sous différentes formes : verbalement ou dans un texte écrit, dans un graphique, une formule algébrique ou une table de valeurs. Pour s'assurer de bien interpréter ces données, il peut s'avérer utile de les transposer d'un registre de représentation à un autre. Par exemple, on peut expliquer verbalement la signification d'un graphique ou encore illustrer une description verbale par une table de valeurs ou un graphique.

3 Observez le graphique présenté à la situation-problème 1.1 (*Durée du palier de décompression*). Ce graphique est formé de segments aux extrémités desquels il y a des points pleins (●) et des points vides (○). Que signifient ces points pleins et ces points vides, selon vous ?

____

____

____

CORRIGÉ PAGE 225

TABLE DES MATIÈRES
CORRIGÉ

RAPPEL

EXERCICES DE RÉACTIVATION
PAGE 195, NUMÉROS 1 ET 2

La représentation des intervalles

Un **intervalle** est un ensemble formé de tous les **nombres réels** compris entre deux bornes. On peut décrire un intervalle à l'aide de mots ; on peut aussi le représenter graphiquement, algébriquement ou en notation abrégée.

Exemple :

L'intervalle des nombres de 2 (inclus) à 5 (exclu) peut être représenté sous les trois formes suivantes.

Graphiquement : 

Algébriquement : $2 \leq x < 5$

En notation abrégée : [2, 5[

4 Pour résoudre la situation-problème 1.1, vous devez analyser la plongée réalisée en vous fiant à la description que la plongeuse en fait.

a) Quelles sont les deux variables mises en relation dans cette description ? Laquelle dépend de l'autre ?

b) Selon vous, cette relation est-elle une **fonction** ? Justifiez votre réponse.

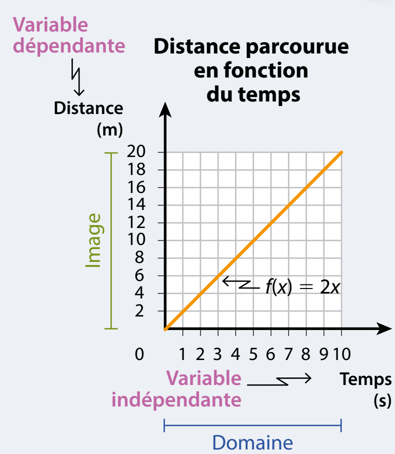
RAPPEL

EXERCICES DE RÉACTIVATION
PAGE 195, NUMÉROS 3 À 5

Le concept de fonction

Une fonction est une relation qui fait correspondre à chaque valeur possible de la **variable indépendante** une seule valeur de la **variable dépendante**. Le **domaine** de la fonction est l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable indépendante. L'**image** (aussi appelée le **codomaine**) de la fonction est l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable dépendante.

La correspondance entre les deux variables est décrite algébriquement par une **règle** qui s'écrit généralement sous la forme $f(x)$ = « une expression algébrique en x ». Dans cette règle, x représente une valeur possible de la variable indépendante et $f(x)$ est l'image de cette valeur par la fonction f.



Pour résoudre la situation-problème 1.1, vous devez représenter et interpréter une fonction en vous servant, entre autres, du graphique donné et de la description de la plongée réalisée. À cette fin, l'activité d'appropriation suivante vous permettra de réactiver vos connaissances sur les **fonctions affines** et les **fonctions constantes**, puis de découvrir les **fonctions définies par parties** et les **fonctions en escalier**.

APPROPRIATION A

Savoirs mathématiques visés :
- représenter une fonction définie par parties ;
- interpréter une fonction définie par parties ;
- interpréter une fonction en escalier à partir de son graphique.

1. Les fonctions affines et les fonctions constantes

Avant de présenter de nouveaux modèles de fonctions, il est opportun de se remémorer les **fonctions polynomiales** de degré 0 et 1 que vous avez étudiées par le passé et qui seront très utiles dans le présent cours.

1 Considérez le contexte suivant : Un jeune homme fait du vélo de montagne. On le voit grimper une côte ayant une inclinaison constante. On veut exprimer l'altitude en mètres à laquelle il se trouve en fonction de la distance parcourue en mètres.

Définissez précisément les deux variables mises en relation.

a) Variable indépendante : ______

b) Variable dépendante : ______

2 Au départ, le jeune homme se trouve à une altitude de 90 m. Après avoir parcouru 150 m, il atteint une altitude de 120 m.

a) Représentez cette situation par une table de valeurs.

b) Quelle est la **valeur initiale** de cette fonction ? ______

c) Quel est le **taux de variation** de la fonction ?

d) Quelle est la règle de cette fonction ? ______

e) À quelle altitude le jeune homme se trouvait-il après avoir parcouru 100 m ?

______

f) Quelle distance le jeune homme avait-il parcourue lorsqu'il a atteint une altitude de 100 m ?

3 Supposez maintenant que le cycliste se déplace sur un terrain plat à une altitude de 120 m. On continue d'observer son altitude en fonction de la distance parcourue. Pour décrire ce que devient la fonction dans ce cas, répondez aux questions suivantes.

a) À quelle altitude se trouvera-t-il après avoir parcouru 50 m sur terrain plat ? ______

b) Quel est le taux de variation de la fonction dans ce cas ? ______

c) Quelle est la règle de cette fonction ? ______

TABLE DES MATIÈRES
CORRIGÉ

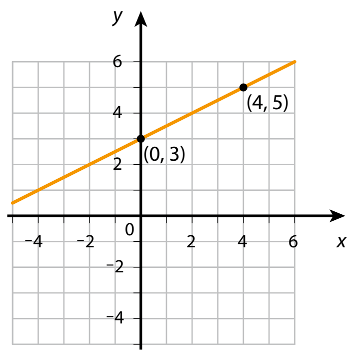
RAPPEL

EXERCICES DE RÉACTIVATION
PAGES 196 ET 197, NUMÉROS 6 À 11

Les fonctions affines

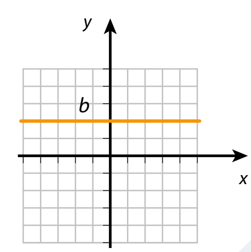
Les fonctions affines sont des fonctions qui sont représentées graphiquement par des droites. Leur règle peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax + b$, où le **paramètre** a est le taux de variation de la fonction, et le paramètre b, l'ordonnée à l'origine, soit, la valeur de la fonction en $x = 0$ (aussi appelée la valeur initiale).

Exemple :

Représentation graphique d'une fonction affine	Règle de la fonction
	$\text{Taux de variation} = \dfrac{\text{Variation des } y}{\text{Variation des } x}$ $= \dfrac{5 - 3}{4 - 0}$ $= 0{,}5$ Règle de la fonction : $f(x) = 0{,}5x + 3$.

Les fonctions constantes

Lorsque le taux de variation est égal à 0, on dit que la fonction est constante. Il s'agit alors d'une droite horizontale. La règle s'écrit sous la forme $f(x) = b$.



On note que dans une expédition en vélo de montagne, on ne fait pas que monter ou faire du plat. Il y a des successions de descentes et de montées de différentes inclinaisons. Pour décrire l'altitude du cycliste dans un tel trajet, on a besoin d'un nouveau type de fonction.

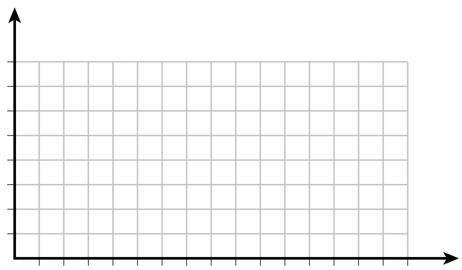
2. Les fonctions définies par parties

Dans cette section, vous découvrirez comment représenter et interpréter ce type de fonction, dont la définition varie sur différents intervalles de son domaine.

4 Reprenez le même contexte du jeune homme faisant du vélo de montagne. Voici la description d'un autre trajet qu'il a réalisé.

« Au départ, il se trouve à une altitude de 30 m. Il monte d'abord une côte à inclinaison constante sur une distance de 100 m pour atteindre une altitude de 50 m. Ensuite, il parcourt 50 m sur un terrain plat, puis il monte une autre côte à inclinaison constante de 100 m de longueur pour atteindre une altitude de 60 m. Suit immédiatement après une descente à inclinaison constante sur une distance de 50 m avec un dénivelé de 5 m. Enfin, il franchit les derniers 100 m pour revenir à son point de départ. Encore une fois, l'altitude à laquelle se trouve le cycliste est une fonction de la distance parcourue. »

a) Représentez graphiquement cette fonction.



STRATÉGIE Planifier une représentation graphique

Lorsqu'on représente graphiquement une fonction en contexte, il importe de se poser certaines questions. Par exemple :

- Quelles sont les variables mises en relation ?
- Laquelle est la variable indépendante ?
- Quel est le domaine de la fonction compte tenu du contexte ?
- Quelle est la valeur minimale ?

Ces paramètres sont essentiels pour pouvoir nommer et graduer adéquatement les axes.

b) Dans la représentation ci-dessus, inscrivez les coordonnées des points qui délimitent les cinq parties importantes du trajet.

c) Calculez le taux de variation de la fonction dans chacune des cinq parties du trajet.

d) Déterminez la règle de la fonction, si la distance parcourue est :

1) inférieure ou égale à 100 m ; ______
2) supérieure à 100 m, mais ne dépasse pas 150 m ; ______
3) supérieure à 150 m, mais ne dépasse pas 250 m ; ______
4) supérieure à 250 m, mais ne dépasse pas 300 m ; ______
5) supérieure à 300 m, mais ne dépasse pas 400 m. ______

ATTENTION !

Il s'agit bien d'une seule fonction, car elle représente une seule situation. La fonction définie par parties est spéciale par le fait que la représentation graphique et la règle algébrique qui en résultent sont différentes dans chacune des parties.

CORRIGÉ PAGE 226

TABLE DES MATIÈRES
CORRIGÉ

5 Référez-vous aux réponses données au numéro 4 pour répondre aux questions suivantes.

a) Quelle distance le cycliste a-t-il parcourue avant de revenir à son point de départ ?

b) Entre quelles valeurs son altitude a-t-elle varié durant son trajet ?

c) Quelle était son altitude à la moitié du trajet ?

d) Pour quelle(s) distance(s), son altitude était-elle de 50 m ?

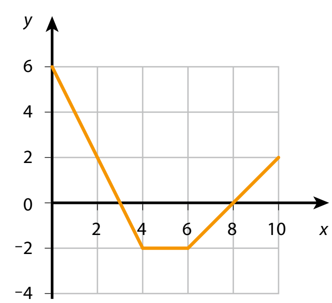
À RETENIR

Les fonctions définies par parties

Une fonction définie par parties est une fonction dont la règle diffère selon l'intervalle dans laquelle se situe la variable indépendante.

Exemple :

Voici une fonction définie par parties.

Représentation graphique d'une fonction définie par parties	Règle de la fonction
	$f(x) = \begin{cases} -2x + 6 & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ -2 & \text{si } 4 \leq x \leq 6 \\ x - 8 & \text{si } 6 \leq x \leq 10 \end{cases}$

Pour calculer algébriquement l'image d'un nombre par la fonction, on doit d'abord déterminer dans quelle partie du domaine ce nombre se situe.

Exemple :

Pour calculer la valeur de $f(9)$:

- on doit d'abord constater que 9 se situe dans l'intervalle $]6, 10]$;
- ce qui permet d'utiliser la règle $f(x) = x - 8$;
- puis de calculer : $f(9) = 9 - 8 = 1$.

ASTUCE

Les intervalles qui permettent de définir la fonction peuvent aussi s'écrire sous la forme abrégée. Dans ce cas, on aurait :

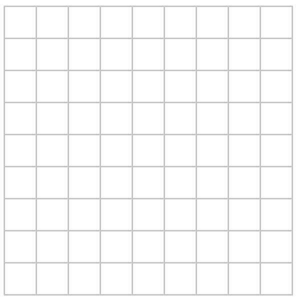
$$f(x) = \begin{cases} -2x + 6 & \text{si } x \in [0, 4] \\ -2 & \text{si } x \in [4, 6] \\ x - 8 & \text{si } x \in [6, 10] \end{cases}$$

On remarque que les intervalles sont **non disjoints** ; par exemple, la borne 4 est incluse dans le premier intervalle et elle est incluse dans le second également.

EXERCEZ-VOUS

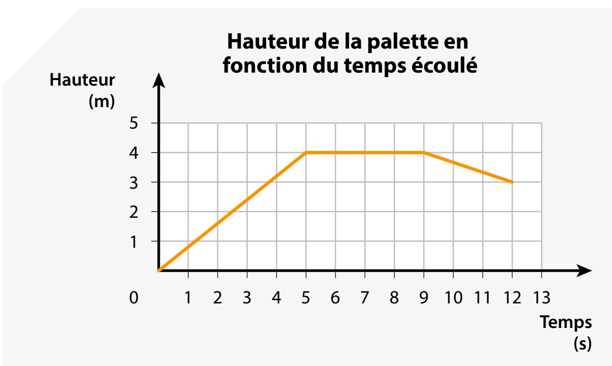
6 Soit la fonction *f* définie ainsi : $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ {}^{-}x + 7 & \text{si} \quad 2 < x \leq 5 \\ 2 & \text{si} \quad 5 < x \leq 8 \end{cases}$

a) Représentez graphiquement cette fonction.



b) Déterminez algébriquement la valeur de $f(4{,}2)$.

7 Dans l'entrepôt d'un magasin, un employé déplace une palette remplie de boîtes du sol vers une étagère à l'aide d'un monte-charge. Il lui faut seulement 12 s pour le faire.



ATTENTION !

Assurez-vous que les intervalles qui délimitent les parties de la fonction dans votre règle sont bien disjoints et recouvrent entièrement le domaine, soit tous les temps possibles de 0 s à 12 s inclusivement.

a) Déterminez la règle de cette fonction.

b) Quelle est la hauteur de l'étagère sur laquelle la palette a été déposée ? ____________________

c) À quelle hauteur la palette se trouvait-elle après 3 s ? ____________________

3. Les fonctions en escalier

Le graphique présenté dans la situation-problème 1.1 (*Durée du palier de décompression*) illustre une fonction en escalier. Les graphiques qui représentent les fonctions en escalier ressemblent à des escaliers. La rubrique suivante décrit les principales caractéristiques de ce type de fonction que vous devez savoir interpréter.

À RETENIR

Les fonctions en escalier

Une fonction en escalier a la particularité d'être constante sur chacun des intervalles qui servent à la définir et de varier brusquement lorsque la variable indépendante passe d'un intervalle à l'autre.

Les **valeurs critiques** de la fonction sont les bornes des intervalles où la fonction varie par sauts.

Il en résulte que le graphique de la fonction en escalier est constitué seulement de segments horizontaux. Un point plein (●) à l'extrémité du segment indique que cette extrémité fait partie du graphique, alors qu'un point vide (○) indique que l'extrémité n'en fait pas partie. L'image d'une valeur critique correspond toujours à l'ordonnée du point plein.

Exemple :

Représentation graphique d'une fonction en escalier

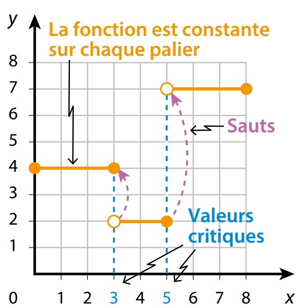


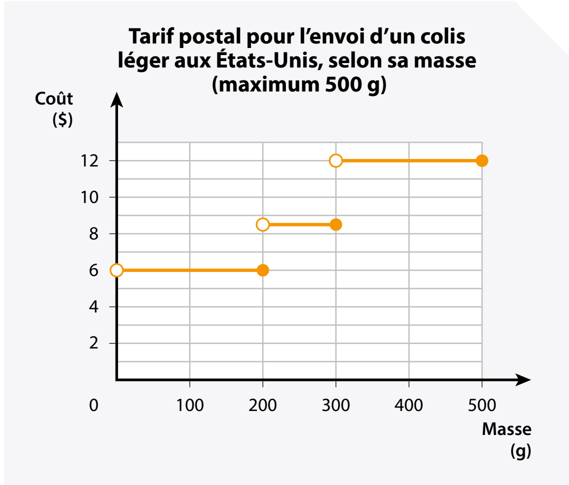
Table de valeurs

x	$f(x)$
[0, 3]	4
]3, 5]	2
]5, 8]	7

- Les valeurs critiques de la fonction sont 3 et 5.
- Les points pleins associés à ces valeurs critiques dans le graphique permettent de dire que $f(3) = 4$ et $f(5) = 2$.

EXERCEZ-VOUS

8 Soit la représentation graphique ci-contre.



a) Interprétez cette représentation graphique en décrivant les variables qui sont mises en relation. Donnez un exemple numérique pour illustrer la relation entre ces variables.

b) Dans ce contexte, quelles valeurs la masse d'un colis peut-elle prendre ?

c) Quels sont les coûts possibles d'un tel envoi postal ?

d) Quelles sont les valeurs critiques de cette fonction ?

e) Quel est le coût d'envoi d'un colis :

1) de 299 g ? 2) de 300 g ? 3) de 301 g ?

f) Quelle doit être la masse d'un colis pour que son coût d'envoi soit de seulement 6 $?

g) Représentez la fonction à l'aide d'une table de valeurs.

Vous êtes maintenant en mesure de reconnaître, de représenter et d'interpréter deux nouveaux modèles de fonctions, soit les fonctions définies par parties et les fonctions en escalier. Vous pouvez utiliser ces nouveaux savoirs pour résoudre la situation-problème 1.1, *Un palier de décompression*.

CORRIGÉ PAGE 227

RÉSOLUTION

Vous êtes maintenant en mesure de compléter la résolution de la situation-problème 1.1.

SITUATION-PROBLÈME DE LA PAGE 4

TÂCHE

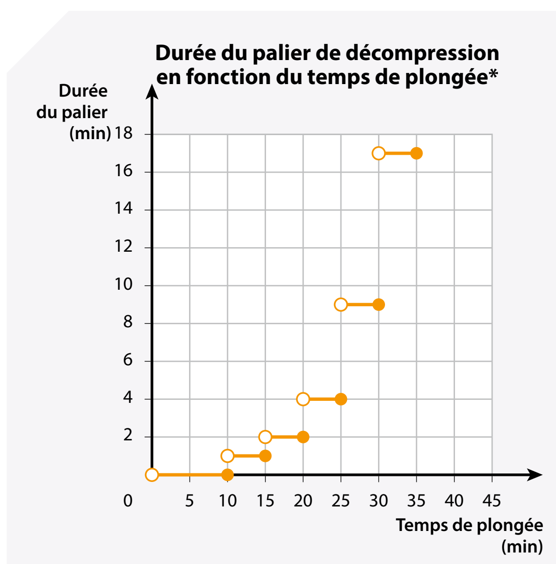
Afin de valider si son ami a raison, vous devez déterminer durant quel pourcentage de la plongée, la plongeuse amateur se trouvait sous les 15 m de profondeur. Justifiez votre réponse à l'aide de représentations appropriées.

Éléments descriptifs de la plongée

- La plongeuse est d'abord descendue jusqu'à 10 m de profondeur en 1 min.
- Après être restée 2 min à 10 m, elle est descendue jusqu'à 20 m, où elle est restée 5 min.
- Elle a continué ensuite la descente jusqu'à 30 m.
- Après 20 min à cette profondeur, elle a commencé à remonter à la surface en arrêtant seulement le temps requis pour le palier de décompression.

Autres données pertinentes de la situation-problème 1.1

- Le palier de décompression se fait à 3 m de la surface de l'eau.
- La durée du palier est déterminée à l'aide du graphique ci-contre, en fonction du temps de plongée.
- Le temps de plongée se calcule à partir du moment où le plongeur est dans l'eau jusqu'au début de la remontée.
- Les descentes et les remontées ont été réalisées à la même vitesse.



* Normes pour une profondeur maximale atteinte de 30 m

STRATÉGIE Planifier la résolution d'un problème

Pour structurer votre solution et vous assurer de ne rien oublier, certaines questions peuvent vous guider : Qu'est-ce que je dois trouver ? Quelles mesures dois-je connaître pour calculer cette valeur ? Quelles données du problème vont m'aider à déterminer ces mesures ? Quel registre de représentation pourrait m'être utile pour mieux comprendre le problème ou pour mieux expliquer ma solution ?

Résolution

Réponse : ____

____

CORRIGÉ PAGE 227

TABLE DES MATIÈRES
CORRIGÉ

APPROPRIATION B

Savoirs mathématiques visés :

- traduire une situation par une fonction en escalier ;
- déterminer et interpréter les propriétés de fonctions définies par parties ou en escalier.

1. Traduire une situation par une fonction en escalier

Pour résoudre la situation-problème 1.1, vous deviez traduire une description verbale par une fonction définie par parties. D'autres contextes pourraient se traduire par un modèle qui serait une fonction en escalier. La situation suivante est un exemple.

1 Une jeune femme s'entraîne à la nage dans une piscine de 25 m de longueur. Elle veut nager sur une distance de 100 m. On observe le nombre de longueurs de piscine qu'elle a complétées en fonction de la distance nagée.

a) Déterminez les deux variables mises en relation en précisant laquelle est indépendante et laquelle est dépendante.

____

____

b) Dans ce contexte,

1) quelles valeurs la variable indépendante peut-elle prendre ?

____

2) quelles valeurs la variable dépendante peut-elle prendre ?

____

c) Quelles sont les valeurs critiques de cette fonction ? ______________________

d) Représentez cette fonction de deux façons différentes.

1) À l'aide d'un graphique.

2) À l'aide d'une table de valeurs.

À RETENIR

Traduire une situation par une fonction en escalier

On reconnaît qu'une situation peut être modélisée par une fonction en escalier à deux conditions :

1. la variable dépendante varie seulement par sauts à certaines **valeurs critiques** de la variable indépendante ;
2. entre deux valeurs critiques consécutives, la valeur de la variable dépendante reste constante.

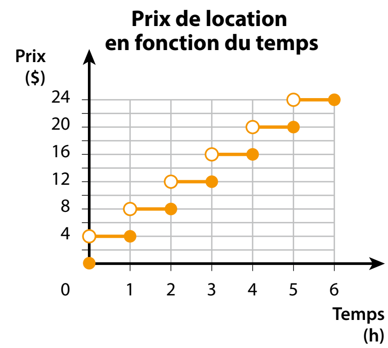
Pour représenter la fonction, il importe de bien déterminer les valeurs critiques et leur image.

Exemple :

Un centre de location d'outils loue ses outils par tranches d'une heure. Cette fonction peut être modélisée par une fonction en escalier.

Les valeurs critiques sont : 1 h, 2 h, 3 h, 4 h, 5 h, etc.

L'image de cette fonction correspond à des multiples de 4 $. On dira que l'image est {4, 8, 12, 16 …} $.



EXERCEZ-VOUS

2 Un prospectus d'une compagnie de téléphonie décrit le coût d'un appel interurbain de la façon suivante :

« Des frais de 0,25 $ seront facturés pour chaque minute ou fraction de minute d'appel. »

Cela signifie, par exemple, qu'un appel de 3 min 15 s comptera pour 4 min et sera donc facturé 4 × 0,25 $, soit 1 $.

a) Quel sera le coût d'un appel :

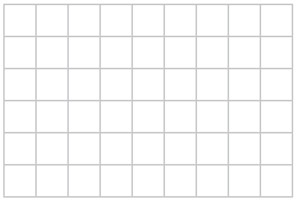
1) de 1 min 40 s ? ______ 2) de 2 min ? ______ 3) de 2 min 1 s ? ______

4) de 2 min 59 s ? ______ 5) de 3 min ? ______

On remarque que le coût de l'appel par rapport à sa durée est une fonction en escalier.

b) Quelles sont les valeurs critiques de cette fonction ? ______

c) Représentez graphiquement cette fonction pour des appels dont la durée ne dépasse pas 4 min.



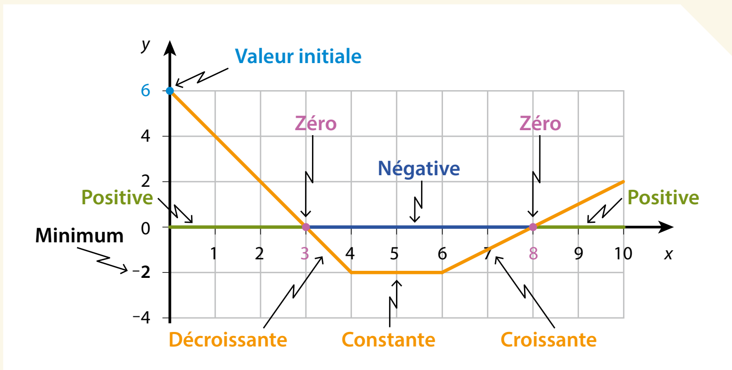
2. Les propriétés des fonctions définies par parties ou en escalier

Nous avons traité du domaine et de l'image d'une fonction dans les pages précédentes. D'autres propriétés des fonctions sont également pertinentes dans l'analyse d'une situation.

À RETENIR

Les propriétés d'une fonction

Pour définir les principales propriétés d'une fonction, on utilisera en exemple la fonction *f* représentée dans le graphique ci-dessous.



Propriété de la fonction	Définition	Exemple
Domaine	L'ensemble des valeurs que prend la variable indépendante.	[0, 10]
Image (ou codomaine)	L'ensemble des valeurs que prend la variable dépendante.	[−2, 6]
Valeur initiale	La valeur de $f(0)$. Graphiquement, $f(0)$ correspond à l'ordonnée du point qui se situe à l'intersection du graphique de la fonction et de l'axe des ordonnées. C'est pourquoi on le nomme aussi **ordonnée à l'origine**.	6
Zéros	La valeur ou les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$ (s'il y en a). Graphiquement, cela correspond à l'abscisse du ou des points qui se situent à l'intersection du graphique de la fonction et de l'axe des abscisses. C'est pourquoi on les nomme aussi **abscisses à l'origine**.	3 et 8
Signe	Une fonction est positive sur une partie de son domaine, si $f(x) \geq 0$ pour toutes les valeurs de x dans cette partie. Une fonction est négative sur une partie de son domaine, si $f(x) \leq 0$ pour toutes les valeurs de x dans cette partie.	La fonction est positive sur $[0, 3] \cup [8, 10]$. Elle est négative sur [3, 8].
Minimum ou **maximum**	Le minimum est la plus petite valeur que prend la variable dépendante. Le maximum est sa plus grande valeur.	Minimum : −2 Maximum : 6

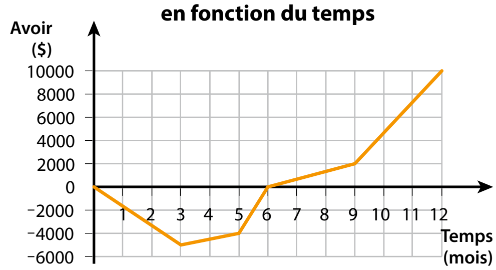
Propriété de la fonction	Définition	Exemple
Variation	Une fonction est constante sur un intervalle du domaine, si la valeur de $f(x)$ ne varie pas pour toutes les valeurs de x dans cet intervalle.	La fonction est constante dans l'intervalle [4, 6].
	La fonction est **croissante** sur l'intervalle, si la valeur de $f(x)$ augmente ou ne varie pas sur tout l'intervalle en x.	Elle est croissante dans l'intervalle [4, 10].
	Elle est **décroissante** sur l'intervalle, si la valeur de $f(x)$ diminue ou ne varie pas sur tout l'intervalle en x.	Elle est décroissante dans l'intervalle [0, 6]

Interpréter les propriétés d'une fonction, c'est expliquer ce que ces propriétés signifient en tenant compte du contexte.

Exemple :

Henri et Jeannette ont décidé de réaliser leur projet d'ouvrir un restaurant. Pendant trois mois, ils dépensent beaucoup pour son aménagement. Puis, ils ouvrent leur commerce au public et commencent à l'exploiter. La rentabilité ne survient que six mois après avoir lancé leur projet. La représentation graphique ci-dessous illustre leur situation pendant la première année de leur projet.

Avoir d'Henri et de Jeannette en fonction du temps



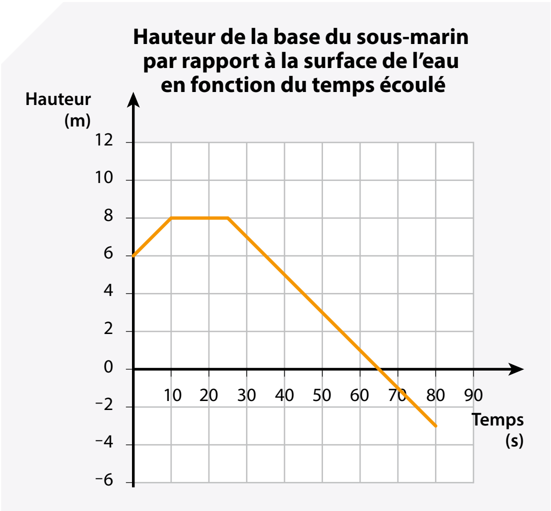
Voici les principales propriétés de la fonction.

Le domaine de la fonction est :	[0, 12] mois
L'image de la fonction est :	[⁻5000, 10 000] $
La valeur initiale est :	0 $
Les zéros de la fonction sont :	0 mois et 6 mois
La fonction est négative sur l'intervalle :	[0, 6] mois
La fonction est positive sur l'intervalle :	[6, 12] mois
La valeur minimale de la fonction est :	⁻5000 $
La valeur maximale de la fonction est :	10 000 $
La fonction est décroissante sur l'intervalle :	[0, 3] mois
La fonction est croissante sur l'intervalle :	[3, 12] mois

TABLE DES MATIÈRES
CORRIGÉ

EXERCEZ-VOUS

3 Sur un bateau, un treuil permet de mettre à l'eau un sous-marin d'exploration. La représentation graphique ci-dessous décrit la position de la base du sous-marin par rapport à la surface de l'eau en fonction du temps écoulé, jusqu'au moment où le sous-marin est détaché.



a) En tenant compte du contexte, décrivez le domaine de la fonction.

b) Au départ, le sous-marin se situe sur le pont du bateau. À quelle hauteur par rapport à l'eau se trouve-t-il ?

c) Quel est le minimum de la fonction ? Interprétez cette valeur en tenant compte du contexte.

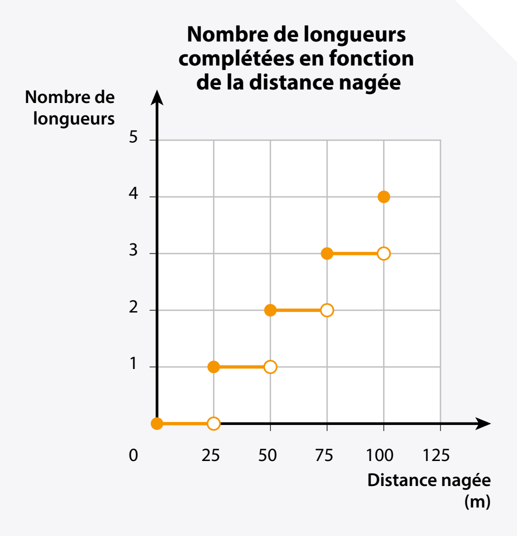
d) À quel moment, la base du sous-marin touche-t-elle à la surface de l'eau ?

e) Dans quelle partie du domaine la fonction est-elle positive ? Interprétez votre réponse en tenant compte du contexte.

f) Sur quel intervalle la fonction est-elle décroissante ? Que se passe-t-il avec le sous-marin durant la période de temps décrite par cet intervalle ?

g) Pendant combien de temps le treuil a-t-il vraiment descendu le sous-marin ?

4 Voici à nouveau la représentation graphique que vous avez construite au numéro 1 de la présente section pour décrire le nombre de longueurs complétées par la jeune femme qui veut nager 100 m.



a) Déterminez la valeur initiale, le maximum et les zéros de la fonction. Interprétez chacune de ces valeurs en tenant compte du contexte.

Valeur initiale : ______________________________

____

____

Maximum : ______________________________

____

Zéros : ______________________________

____

b) Sur l'ensemble de son domaine, cette fonction est-elle croissante, décroissante ou constante ? Expliquez votre réponse.

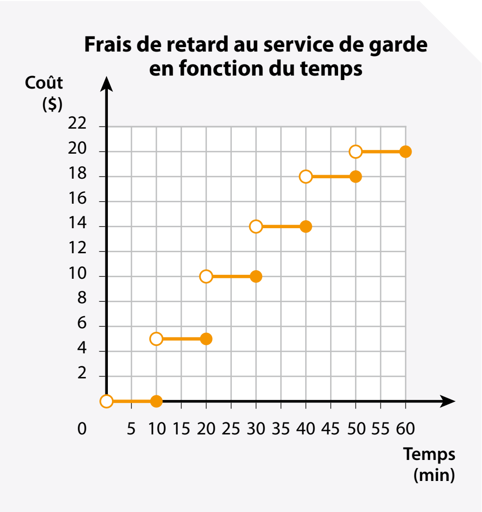
____

____

CORRIGÉ PAGE 229

CONSOLIDATION

1 La représentation graphique suivante illustre les frais de retard facturés aux parents après la fermeture d'un service de garde.



a) Nommez le modèle fonctionnel représenté dans le graphique. ______________________

b) Pour quelles valeurs un parent devra-t-il payer 14 $ de frais de retard ? ______________________

c) Combien paiera une personne qui aura 26 min de retard ? ______________________

d) Quelles sont les valeurs critiques ?

____

____

e) De combien de temps disposent les parents pour aller chercher leur enfant après la fermeture du service de garde sans payer de frais de retard ?

____

____

2 Le VO_2 max est la consommation maximale d'oxygène d'un humain lors de l'effort physique mesuré en litres par minute. Le tableau ci-contre consigne le VO_2 maximum d'un homme en excellente condition physique selon l'âge.

VO_2 max moyen d'un homme selon son âge

Âge	VO_2 max (L/min)
[20, 25[	62
[25, 30[	59
[30, 35[	56
[35, 40[	54
[40, 45[	51
[45, 50[	48
[50, 55[	46
[54, 60[	43
[60, 65[	40

a) Par quel type de fonction peut-on modéliser cette situation ?

____

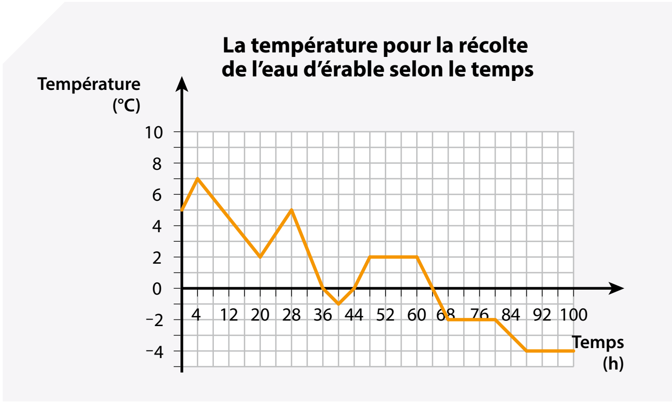
b) Représentez graphiquement cette situation.

c) Comment évolue le lien entre l'âge d'une personne et son VO_2 max ?

____

____

3 La récolte de l'eau d'érable au printemps nécessite des conditions climatiques simples pour s'assurer d'une production maximale. Il faut des températures négatives la nuit et positives le jour. Ainsi, l'acériculteur est assuré d'avoir une excellente récolte. Le graphique ci-dessous représente les températures enregistrées à partir de midi le 5 mars. On considère que la nuit se situe entre minuit et 8 h le matin.



a) Déterminez, en observant la représentation graphique, si certaines journées remplissent les conditions pour obtenir une récolte maximale d'eau d'érable. Expliquez votre raisonnement.

b) Donnez la température maximale et la température minimale atteintes lors de la période étudiée.

c) À quels moments la température est-elle négative ?

d) Déterminez l'intervalle de temps où l'on a observé la température.

e) Quel est l'ensemble des températures observées ?

f) Quelle était la température initiale ?

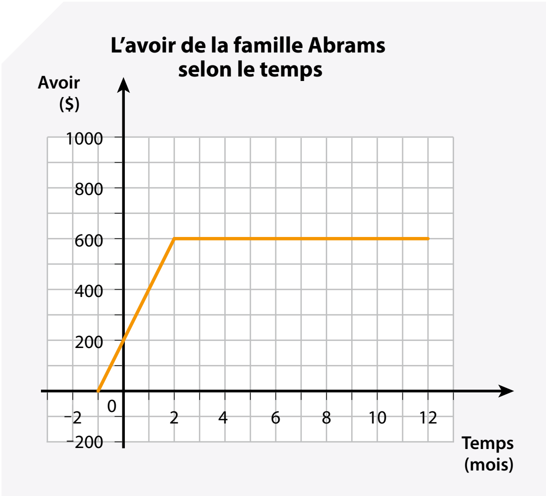
g) À quels moments la température a-t-elle augmenté ?

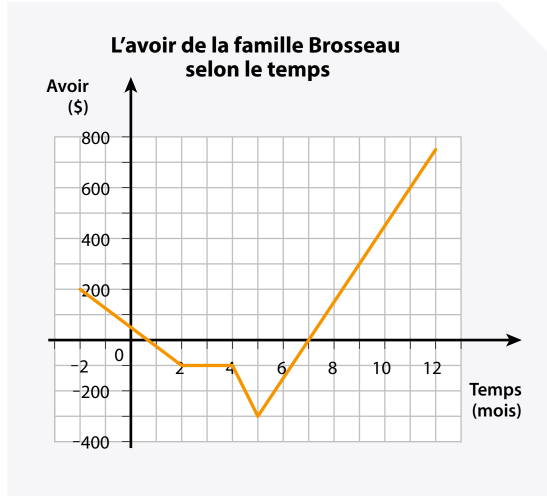
4 Le tableau suivant présente les différents coûts associés à l'utilisation d'un stationnement. Modélisez graphiquement cette situation.

Coût du stationnement en fonction du temps

Temps (min)	Coût ($)
Moins de 10	Gratuit
De 10 à moins de 30	6
De 30 à moins de 60	10
Journée complète (60 ou +)	18

5 Depuis quelques mois, deux familles notent l'évolution de l'avoir en dollars qu'elles cumulent dans leur compte d'épargne. Le temps zéro correspond au 1^er^ mars dernier.





a) Déterminez la date où la famille Brosseau a commencé à observer l'évolution de son compte d'épargne.

b) Déterminez la règle des fonctions définies par parties représentant l'avoir de chacune des familles.

c) De quelle somme disposait chacune des familles le 1^er^ mars ?

Famille Abrams : Famille Brosseau :

d) Quel est l'avoir de chaque famille dans son compte d'épargne après 9 mois ?

6 a) Déterminez la valeur de $f(6)$ dans la fonction définie par parties suivante.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{si} \quad {}^{-}4 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si} \quad 2 \leq x < 6 \\ {}^{-}x + 6 & \text{si} \quad 6 \leq x \leq 12 \end{cases}$$

b) Représentez graphiquement la fonction *f*. Quelle observation pouvez-vous faire en *f*(6) ?

7 Sur le site de Revenu Québec, on décrit le taux d'imposition d'un particulier pour l'année 2016 selon divers pourcentages en fonction des tranches décrites ci-dessous.

a) Quel sera l'impôt provincial payé pour un revenu annuel de 94 000 $?

Taux d'imposition pour l'année 2016 selon le revenu imposable

Revenu imposable ($)	Taux (%)
42 390 ou moins	15
Supérieur à 42 390, ne dépassant pas 84 780	20
Supérieur à 84 780, ne dépassant pas 103 150	24
Supérieur à 103 150	25,75

Source : Revenu Québec, 2016.

b) Représentez graphiquement le lien entre le revenu imposable d'un particulier et l'impôt provincial.

c) De quel modèle fonctionnel s'agit-il ?

d) Y a-t-il un impôt maximal à payer ? Justifiez votre réponse.

CORRIGÉ PAGE 231

8 a) Représentez graphiquement la situation qui met en relation le coût en dollars d'un envoi postal par enveloppe en fonction de sa masse en grammes.

Coût postal en fonction de sa masse

Masse (g)	Coût ($)
]0, 20[	1,55
[20, 50[	2,15
[50, 100[	3,05
[100, 150[	3,20
[150, 300[	4,45
[300, 500[	5,70

b) Déterminez les coûts possibles d'un envoi par enveloppe. ______

c) Déterminez le coût maximum. ______

d) Quelle est la valeur initiale ? ______

e) Cette fonction a-t-elle un zéro ? ______

f) La fonction est-elle croissante ou décroissante ? ______

9 Un supermarché offre un programme afin de fidéliser sa clientèle où chaque dollar dépensé donne un point de récompense. Les points de récompense sont comptabilisés et remis à la fin de chaque mois, sous forme d'un chèque cadeau à utiliser dans le magasin.

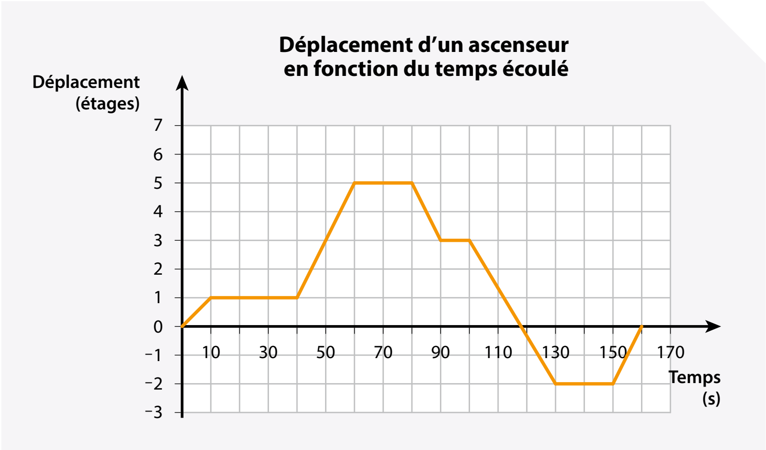
Une famille a reçu un chèque cadeau de 28 $ pour le dernier trimestre. Combien a-t-elle dépensé dans ce supermarché pendant les trois derniers mois ?

Échelle de récompenses

Mes points	600	1500	7500
Mes récompenses ($)	5	12,50	62,50

TABLE DES MATIÈRES
CORRIGÉ

10 La représentation graphique suivante illustre le déplacement d'un ascenseur en fonction du temps en secondes. Répondez aux questions.



a) Déterminez le maximum et le minimum. À quoi correspondent-ils ?

b) Pour quel intervalle l'ascenseur est-il au sous-sol ?

c) Pour quels intervalles l'ascenseur monte-t-il ?

d) Quel est le domaine ? Que symbolise-t-il ?

e) Quelles sont les images ? À quoi correspondent-elles ?

f) À quel moment l'ascenseur est-il au rez-de-chaussée ?

TABLE DES MATIÈRES

CORRIGÉ

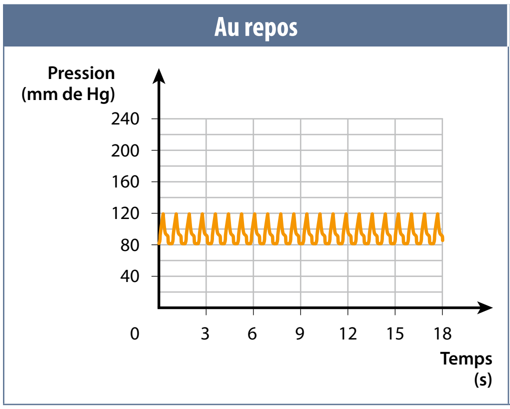
L'effet de l'effort sur le corps

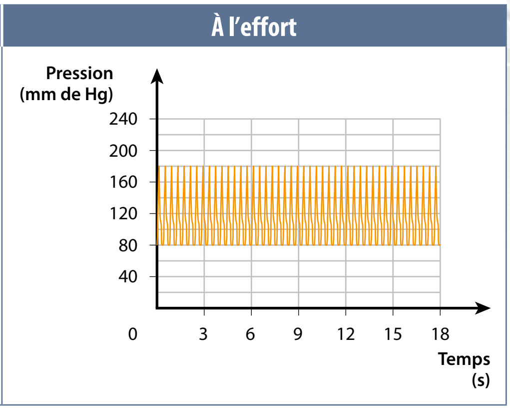
SP 1.2

Lors d'un exercice, le corps s'adapte à l'effort en modifiant le taux d'oxygène dans le sang pour nourrir ses cellules en demande. Cela se manifeste, entre autres, par une variation du rythme cardiaque et de la pression artérielle, et par une variation de la ventilation pulmonaire (dont on rend compte en mesurant la quantité d'air que contiennent les poumons à chaque instant de la respiration).

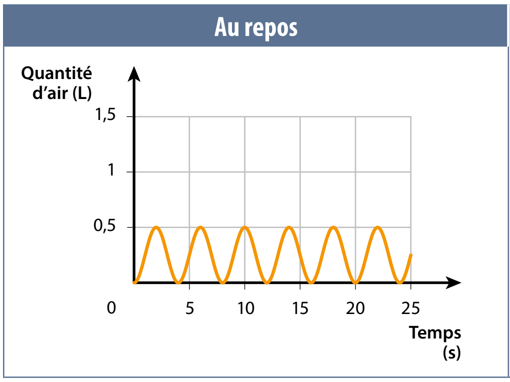
Pour analyser ces phénomènes, on a mesuré la pression artérielle et la ventilation pulmonaire d'une personne au repos et lors d'un exercice intensif de course sur tapis roulant. Les représentations ci-dessous en sont des modélisations.

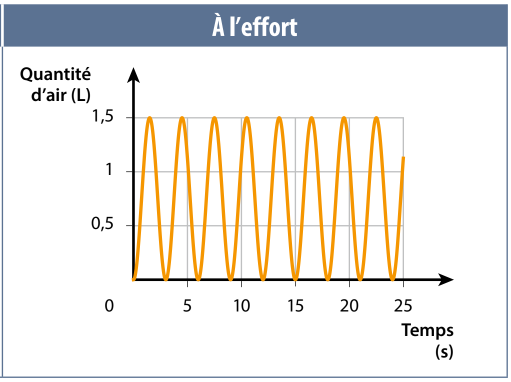
Pression artérielle selon le temps écoulé





Ventilation pulmonaire selon le temps écoulé





TÂCHE

Vous devez décrire l'effet de l'exercice sur le corps. À l'aide de pourcentages ou de rapports, décrivez notamment les changements que l'exercice provoque sur les pressions artérielles minimales et maximales, sur le rythme cardiaque, sur le nombre de respirations par minute et sur la quantité d'air respiré.

EXPLORATION

Les questions suivantes vont vous amener à bien cerner le contexte et les représentations graphiques de la situation-problème 1.2. Elles vous aideront également à mieux saisir la tâche qui vous est demandée.

1 Afin de bien comprendre ce que signifient les expressions « pression artérielle » et « ventilation pulmonaire », répondez aux questions suivantes.

a) Lorsque le cœur se contracte qu'arrive-t-il à la pression artérielle ? ______________________

b) La respiration est constituée de deux phases, l'inspiration et l'expiration. Après quelle phase la quantité d'air est-elle la plus élevée dans les poumons ?

____

____

2 Observez maintenant les quatre représentations graphiques de la situation-problème 1.2.

a) Quelles caractéristiques ces représentations ont-elles en commun ?

____

____

____

b) Quelles sont les variables dépendantes dans ces représentations ?

____

____

____

STRATÉGIE Interpréter une représentation graphique

Pour bien saisir la signification d'une représentation graphique, il est essentiel de reconnaître la variable dépendante et la variable indépendante, ainsi que leurs unités de mesure. De plus, on doit tenir compte de la graduation des axes. Il importe tout autant d'observer le graphique : est-ce une droite, une ligne brisée, une courbe ? Si c'est une courbe, a-t-elle des caractéristiques particulières ? Représente-t-elle une fonction ? Son domaine est-il borné ou se prolonge-t-il à l'infini ?

LE SAVIEZ-VOUS ?

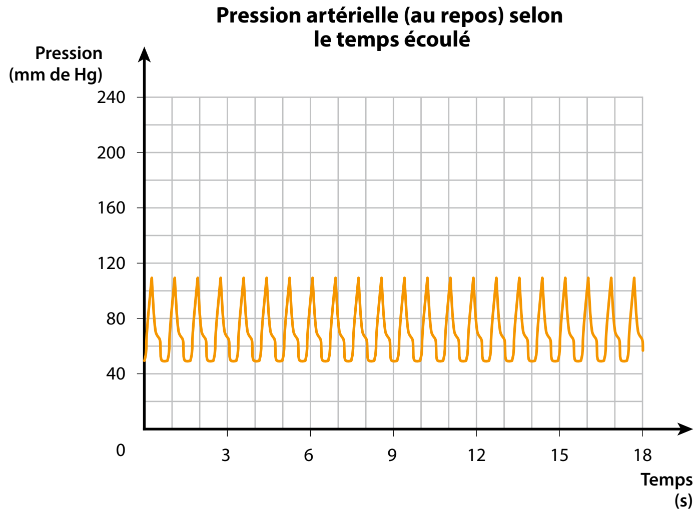
Mesurer la pression d'un patient est un procédé courant dans un hôpital. Cette mesure est donnée par deux nombres qui indiquent la pression maximale et la pression minimale.

Exemple : **Une mesure de 189/105, comme l'indique la photo, doit être interprétée de la façon suivante : La pression maximale, atteinte lorsque le cœur se contracte, est de 189 mm de mercure (Hg), tandis que la pression minimale, atteinte lorsque le cœur se relâche, est de 105 mm de Hg.**

Une personne dont la pression maximale *au repos* dépasse 140 souffre probablement d'hypertension. L'hypertension augmente de façon marquée les risques de maladie cardiovasculaire, l'une des principales causes de décès au Canada.

CORRIGÉ PAGE 232

3 Voici un agrandissement de la première représentation graphique du problème.



a) Quel est le domaine de cette fonction ? Formulez votre réponse en tenant compte du contexte.

b) Estimez le minimum et le maximum de la fonction. Qu'est-ce que ces valeurs signifient dans le contexte ?

c) Le graphique est constitué d'un motif de base qui se répète. Mettez en évidence ce motif en le surlignant dans la représentation ci-dessus.

d) À quoi correspond ce motif dans le contexte ?

STRATÉGIE Analyser une fonction à l'aide de ses propriétés

Comme le problème de la situation 1.2 consiste essentiellement à interpréter les quatre graphiques et à les comparer, il convient d'associer chaque élément de la tâche à certaines propriétés des fonctions représentées. La première étape de résolution consistera donc à déterminer ces propriétés pour chaque fonction et à les interpréter en tenant compte du contexte.

Pour analyser les fonctions dont les représentations graphiques sont données dans la situation-problème 1.2, les connaissances sur les propriétés que vous avez acquises jusqu'ici ne seront pas suffisantes. En effet, vous devrez utiliser des termes nouveaux, comme **cycle** et **période** pour décrire de façon plus complète ce type de fonctions que l'on appelle des **fonctions périodiques**.

TABLE DES MATIÈRES
CORRIGÉ

APPROPRIATION A

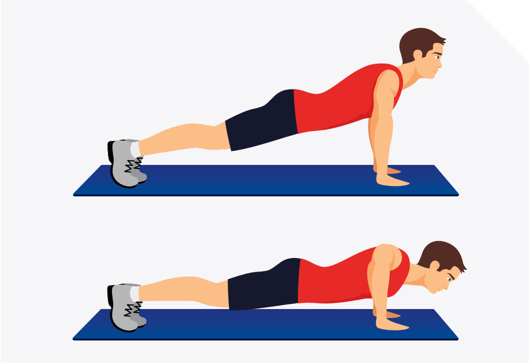
Savoirs mathématiques visés :
- découvrir les concepts de cycle et de période ;
- interpréter des fonctions périodiques ;
- représenter graphiquement des fonctions périodiques.

1. Le cycle, la période et la fonction périodique

Cette activité d'appropriation vous permettra d'étudier une nouvelle fonction : la fonction périodique. Afin de vous familiariser avec les termes cycle et période associés à cette fonction, considérez la situation suivante.

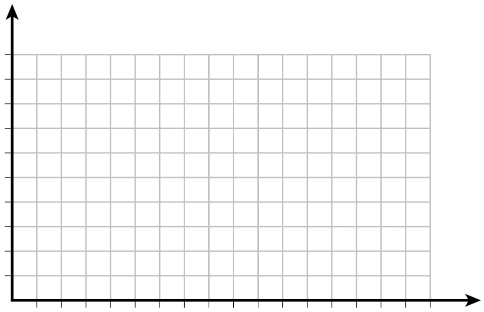
1 Faire des pompes (*push-up*) est un excellent exercice de base pour renforcer les muscles pectoraux et les muscles des bras. Voici une description possible de cet exercice :

« En position de départ, les bras sont tendus et le menton est à 45 cm du sol. En fléchissant les bras, on descend le menton jusqu'à 15 cm du sol en 1 s, puis on remonte immédiatement à la position de départ, en 1 s également. On fait une pause de 1 s dans cette position de départ. Répéter 5 fois l'ensemble du mouvement. »



On observe la hauteur du menton en centimètres par rapport au sol en fonction du temps écoulé en secondes.

a) Représentez graphiquement cette fonction pour l'ensemble de l'exercice.



b) Votre graphique devrait être constitué d'un motif qui se répète. Mettez en évidence ce motif en le surlignant dans votre représentation.

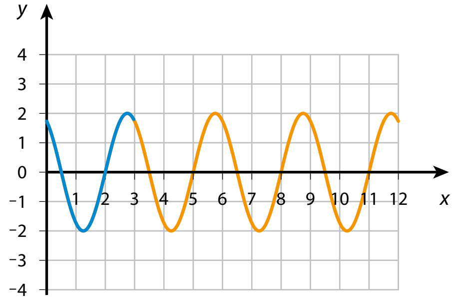
c) Quelle est la longueur de l'intervalle dans lequel s'inscrit le motif que vous avez surligné en b) ? Que signifie cette longueur dans le contexte ?

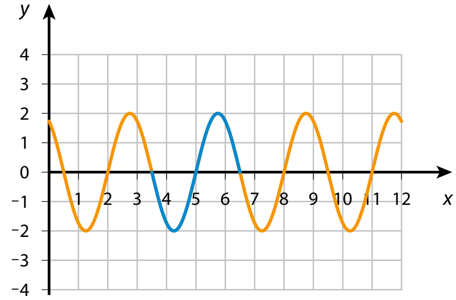
____

d) Si l'exercice se continuait pendant 1 min, combien de pompes ferait-on ? ______________________________

ASTUCE

Le cycle que l'on met en évidence dans le graphique d'une fonction périodique peut commencer à n'importe quel point de celui-ci. Dans les graphiques ci-dessous, par exemple, on aurait pu tracer un cycle entre 0 et 3 ou entre 3,5 et 6,5 ; la répétition du cycle choisi produit la même fonction. On remarque que la période est toujours égale à 3.





CORRIGÉ PAGE 233

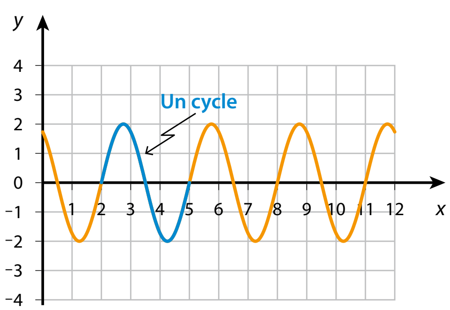
À RETENIR

Les fonctions périodiques

Une fonction dont le graphique est constitué d'un **motif** qui se répète sur la totalité de son domaine porte le nom de «fonction périodique». Le motif qui se répète est un **cycle** de la fonction.

La **période** de la fonction est la longueur du plus petit intervalle en *x* qui contient un cycle complet.

Exemple :

Représentation graphique et cycle d'une fonction périodique	Période de la fonction
	Le cycle indiqué par la ligne bleue dans le graphique est inscrit dans l'intervalle qui va de 2 à 5 sur l'axe des *x*. La période de la fonction est donc égale à 3, soit 5 − 2.

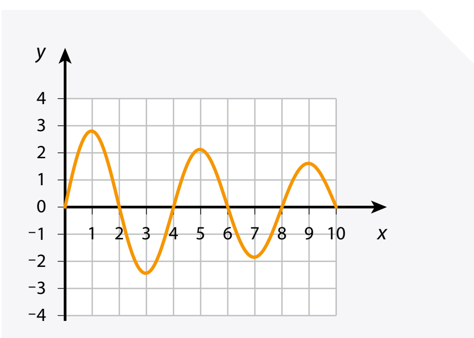
ATTENTION !

Dans la réalité, il existe plusieurs phénomènes qui sont cycliques, sans être tout à fait périodiques. Par exemple, la marée est un phénomène cyclique qui se répète deux fois par jour, mais elle n'est jamais exactement la même. **Pour être périodique, il faut que le cycle se répète tel quel sans aucun changement.** Par contre, dans un court délai, les phénomènes cycliques peuvent être **modélisés** à l'aide de fonctions périodiques, car les petites perturbations du cycle sont alors considérées comme négligeables.

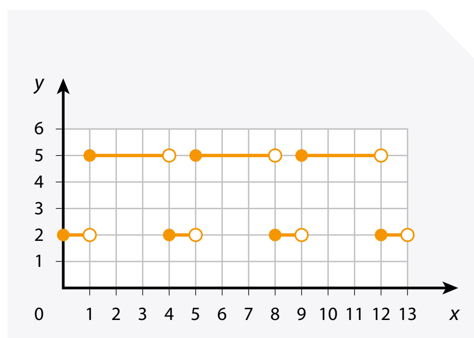
EXERCEZ-VOUS

2 Parmi les graphiques suivants, lesquels représentent une fonction périodique ? (Encerclez les lettres pour indiquer vos choix.) Justifiez votre réponse en mettant en évidence un cycle dans les graphiques identifiés.

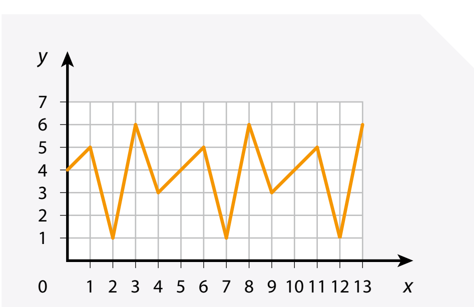
A)



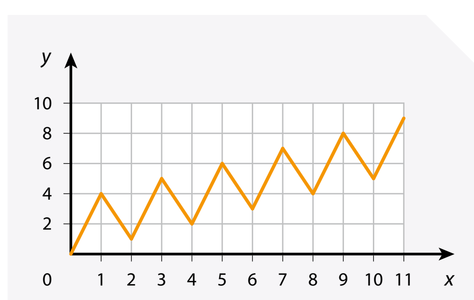
B)



C)



D)



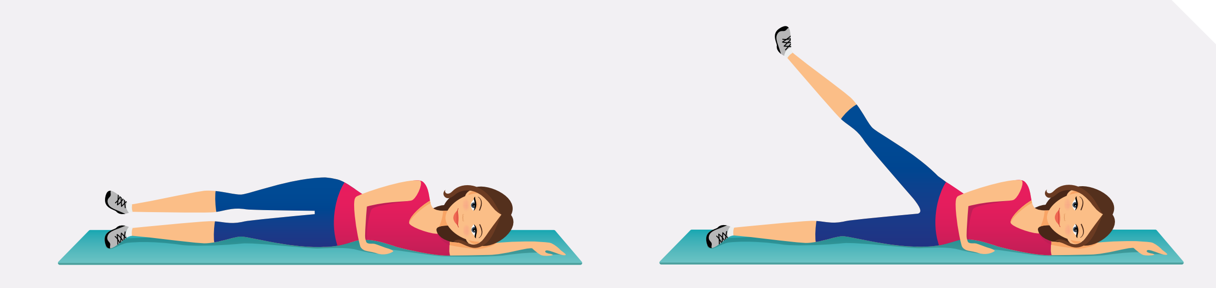
3 Déterminez la période de chacune des fonctions périodiques du numéro précédent.

TABLE DES MATIÈRES
CORRIGÉ

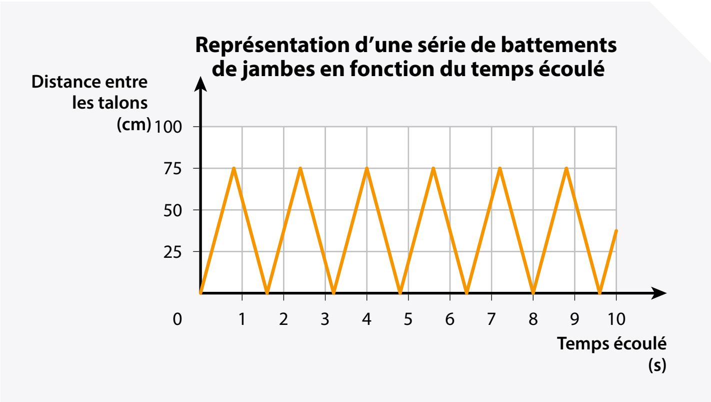
2. Interpréter le graphique d'une fonction périodique

Dans la première partie de cette activité d'appropriation, vous avez représenté graphiquement une fonction périodique à partir d'informations verbales décrivant un exercice de pompes. Il faudrait aussi pouvoir faire la transposition contraire : partir du graphique pour décrire ce qui se passe dans la réalité. C'est ce que propose la question suivante.

4 Le battement de jambes est un exercice qui permet de renforcer les muscles des cuisses et des hanches.



Voici comment on pourrait modéliser cet exercice.



En vous fiant à cette représentation graphique, répondez aux questions suivantes.

a) Que pouvez-vous dire de la position des talons au début de cet exercice ?

b) Entre quelles distances la position des talons varie-t-elle ?

c) Décrivez à quoi correspond un cycle de la fonction dans ce contexte.

d) Estimez la période de la fonction.

e) À ce rythme, combien de temps faudra-t-il pour effectuer 30 fois le mouvement ?

ASTUCE

Les graduations des axes de la représentation graphique ne permettent pas toujours de déterminer avec précision la longueur de l'intervalle dans lequel est inscrit le cycle. Dans ce cas, on pourra améliorer la précision de l'estimation en choisissant un intervalle plus grand qui contient un nombre entier de cycles complets. On déduit alors la période par un raisonnement proportionnel.

Exemple :
Dans la question d) ci-contre, il y a exactement 5 cycles en 8 s. On peut alors trouver le temps précis au dixième près du nombre de secondes par cycle : pour un cycle il faut 1,6 s, soit $\frac{8}{5}$.

CORRIGÉ PAGE 233

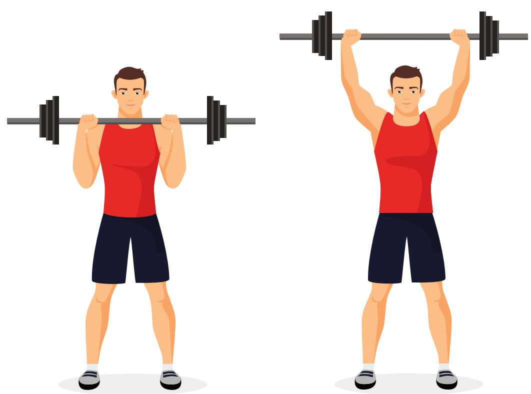
À RETENIR

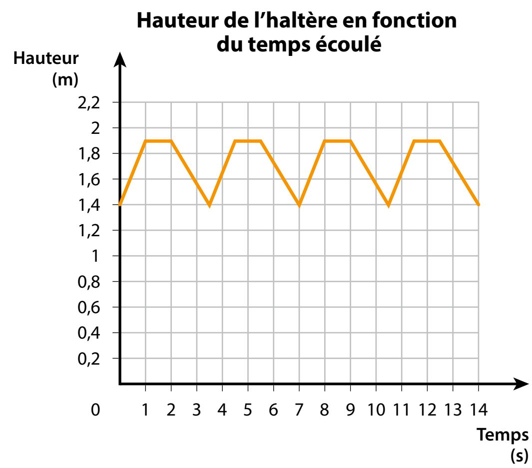
Interpréter le graphique d'une fonction périodique

Pour interpréter une fonction périodique à partir de son graphique, on doit y repérer un **cycle complet**. Il suffit alors d'examiner ce cycle pour déterminer le minimum, le maximum et l'image de la fonction.

Exemple :

Le développé militaire est un exercice physique qui consiste à lever un haltère de la hauteur des épaules jusqu'au bout des bras. Voici une représentation graphique du mouvement répété à quatre reprises.



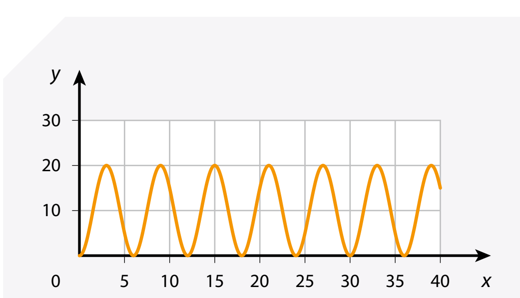


- L'observation d'un cycle permet de voir que l'haltère se déplace de 1,4 m à 1,9 m. L'image de la fonction est donc [1,4; 1,9], son minimum 1,4 et son maximum 1,9.
- Comme il y a 4 cycles en 14 s, la période de la fonction est de 3,5 s (soit 14 ÷ 4).

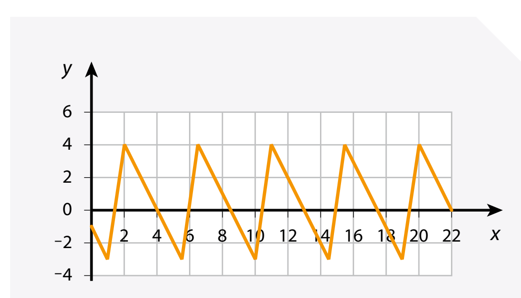
EXERCEZ-VOUS

5 Déterminez la période de chacune des fonctions représentées ci-dessous.

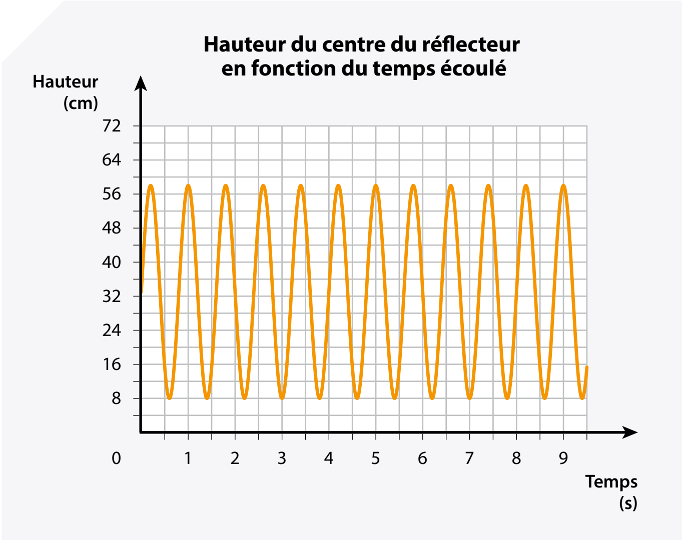
a)



b)



6 Le graphique suivant décrit la hauteur en centimètres du centre d'un réflecteur sur une roue de bicyclette en mouvement.



TIC

L'activité TIC 1.2.1 vous permettra d'observer les cycles et la période d'une fonction périodique à l'aide de GeoGebra. Cette activité est accessible sur portailsofad.com.

a) Entre quelles hauteurs la position du centre du réflecteur varie-t-elle ? ____________

b) En interprétant votre réponse en a), déduisez les mesures suivantes :

1) la distance du centre de la roue au centre du réflecteur ;

2) le diamètre de la roue.

c) En combien de temps, la roue fait-elle un tour complet ?

d) À quelle vitesse en mètres par seconde la bicyclette roule-t-elle ? Arrondissez votre réponse au dixième près.

ATTENTION !

Lorsque des calculs conduisent à un résultat ayant plusieurs décimales, il est souvent nécessaire d'arrondir pour que la réponse ait du sens. Pour déterminer à quelle position arrondir, il faut tenir compte du contexte et de la précision des données fournies.

Exemple :
Pour calculer la circonférence de la roue, il suffit de multiplier son diamètre par π, ce qui conduit en théorie à une réponse ayant une infinité de décimales. Par contre, le résultat ne devrait pas être donné avec plus de précision que la valeur estimée du diamètre. Dans le cas précédent, on peut arrondir aux centimètres près.

CORRIGÉ PAGE 234

RÉSOLUTION

Vous êtes maintenant en mesure de compléter la résolution de la situation-problème 1.2.


SITUATION 1.2

L'effet de l'effort sur le corps

Lors d'un exercice, le corps s'adapte à l'effort en modifiant le taux d'oxygène dans le sang pour nourrir ses cellules en demande. Cela se manifeste, entre autres, par une variation du rythme cardiaque et de la pression artérielle, et par une variation de la ventilation pulmonaire (dont on rend compte en mesurant la quantité d'air que contiennent les poumons à chaque instant de la respiration).

Pour analyser ces phénomènes, on a mesuré la pression artérielle et la ventilation pulmonaire d'une personne au repos et lors d'un exercice intensif de course sur tapis roulant. Les représentations ci-dessous en sont des modélisations.

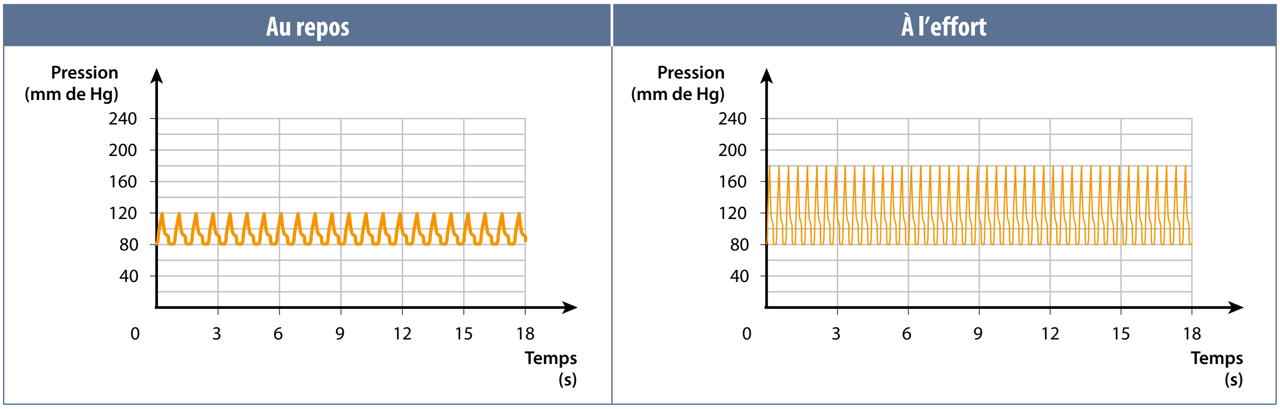
SITUATION-PROBLÈME DE LA PAGE 28

TÂCHE

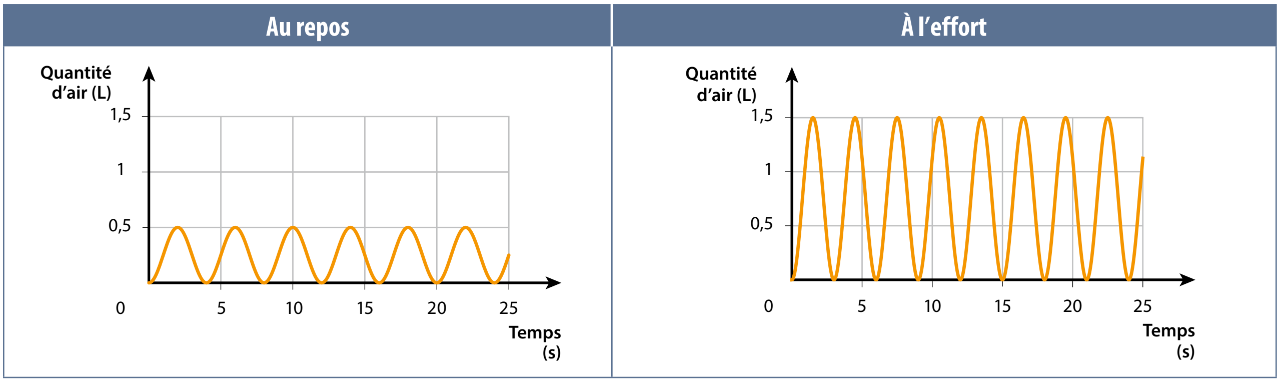
Vous devez décrire l'effet de l'exercice sur le corps. À l'aide de pourcentages ou de rapports, vous décrirez notamment les changements que l'exercice provoque sur les pressions artérielles minimales et maximales, sur le rythme cardiaque, sur le nombre de respirations par minute et sur la quantité d'air respiré.

Rappel des représentations graphiques

Pression artérielle selon le temps écoulé



Ventilation pulmonaire selon le temps écoulé



Résolution

Description verbale :

STRATÉGIE Utiliser un tableau pour comparer

En inscrivant les propriétés des fonctions dans un tableau, vous pourrez plus facilement les comparer. C'est l'un des avantages de la représentation à l'aide d'un tableau. Elle permet d'associer ou de comparer des informations diverses, qualitatives ou quantitatives, dans un seul regard.

CORRIGÉ PAGE 234

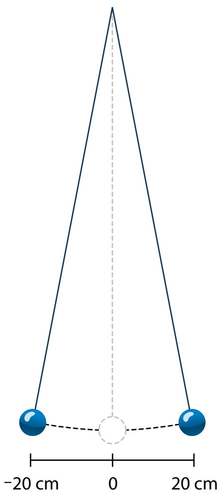
APPROPRIATION B

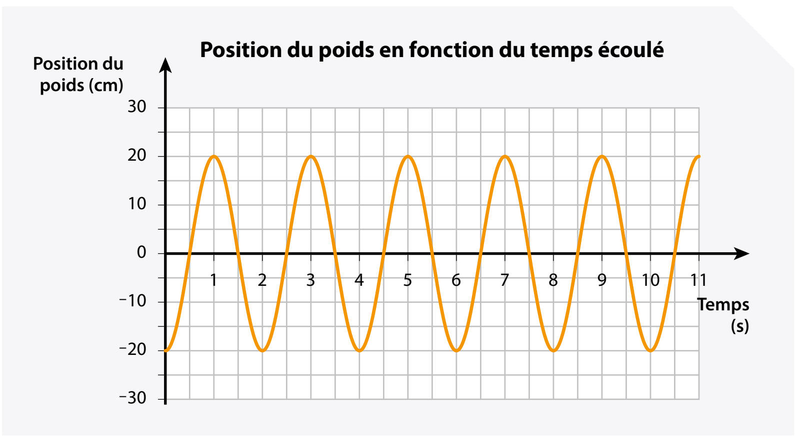
Savoirs mathématiques visés :
- déterminer certaines propriétés d'une fonction périodique ;
- extrapoler ou interpoler l'image d'un nombre par une fonction périodique.

1. L'analyse d'une fonction périodique

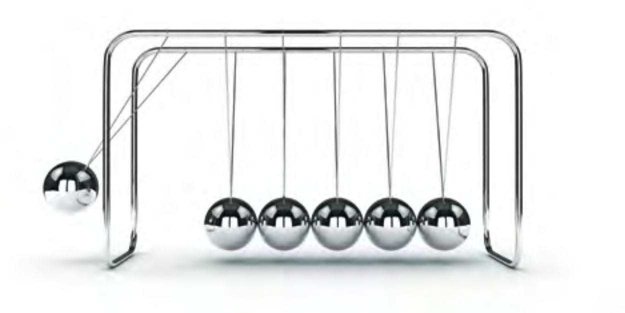
Cette activité d'appropriation vous permettra d'analyser d'autres propriétés de la fonction périodique. Pour déterminer sa variation, ses zéros ou son signe, il est nécessaire de tenir compte de la période de la fonction, particulièrement lorsque le domaine de la fonction n'a pas de limite, comme c'est le cas dans la situation suivante.

1 On fait osciller un pendule dont la corde mesure environ 1 m. Le poids se déplace par rapport à la verticale de 20 cm vers la gauche jusqu'à 20 cm vers la droite, puis revient en sens inverse, le mouvement se répétant sans cesse.





Déterminez le domaine, le minimum, le maximum et la période de cette fonction représentée graphiquement en les interprétant selon le contexte.



LE SAVIEZ-VOUS ?

Dans la réalité, les oscillations d'un pendule ont tendance à s'amoindrir à cause du frottement de l'air. Les oscillations deviennent de moins en moins prononcées et elles finissent toujours par s'arrêter après un certain temps. Par contre, dans le vide, sans force de frottement, un pendule pourrait osciller indéfiniment. Dans cette situation, vous pouvez supposer que c'est le cas.

1.1 La variation de la fonction

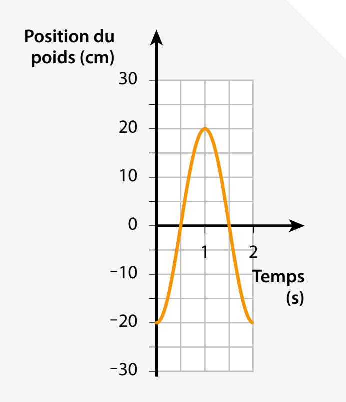
Les questions 2 à 7 se rapportent toutes au même contexte du pendule. Elles vont vous permettre de déterminer et d'interpréter les autres propriétés de la fonction périodique. On commence ici par l'analyse de la variation de la fonction, c'est-à-dire de sa croissance et de sa décroissance.

2 Pour analyser cette propriété, considérez d'abord le premier cycle de la fonction, entre 0 s et 2 s.

a) Quel est l'intervalle de croissance de la fonction dans ce cycle ?

b) Quel est l'intervalle de décroissance ?

c) Interprétez ces deux intervalles en tenant compte du contexte.



3 Considérez maintenant les cycles suivants de la fonction, entre 2 s et 4 s, entre 4 s et 6 s, etc. Déterminez l'intervalle de croissance et de décroissance dans chacun de ces cycles en tenant compte du contexte.

	2^e cycle	3^e cycle	4^e cycle	5^e cycle
Intervalle de croissance				
Intervalle de décroissance				

4 Déterminez ce que seraient les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction dans le 10^e cycle. Expliquez votre démarche.

1.2 Les zéros de la fonction et l'analyse du signe

Il faut maintenant regarder de plus près les zéros d'une fonction périodique et analyser son signe.

5 Observez encore une fois le premier cycle du pendule entre 0 s et 2 s.

a) Quels sont les zéros de la fonction si on se limite à ce cycle ?

b) Dans quel intervalle la fonction est-elle positive dans ce cycle ?

c) Interprétez vos réponses en a) et en b) en tenant compte du contexte.

CORRIGÉ PAGE 236

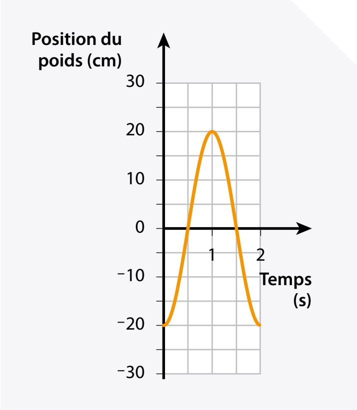
6 Le domaine de la fonction ne se limite pas au premier cycle. En théorie, on peut supposer qu'il se continue à l'infini.

a) En tenant compte du contexte, comment décririez-vous les zéros de la fonction sur tout son domaine ?

b) Comment décririez-vous la partie du domaine dans laquelle la fonction est positive ?

1.3 L'image d'un nombre quelconque par la fonction

Cette section se termine par le problème suivant : comment peut-on déterminer l'image d'un nombre par la fonction si ce nombre se trouve hors de la représentation graphique. Par exemple, dans le contexte du pendule, on pourrait se demander quelle sera sa position après 30 s ou après 33,5 s ou encore après 35,3 s.



7 Cochez la case indiquant la position du pendule à chacun des temps donnés. Expliquez votre démarche.

Temps	**Position du pendule**		
a) Après 30 s :	☐ à la verticale	☐ à gauche de la verticale	☐ à droite de la verticale
b) Après 33,5 s :	☐ à la verticale	☐ à gauche de la verticale	☐ à droite de la verticale
c) Après 35,3 s :	☐ à la verticale	☐ à gauche de la verticale	☐ à droite de la verticale

À RETENIR

L'analyse d'une fonction périodique

Lorsqu'une fonction est périodique, les éléments du domaine dont la différence est un multiple de la période ont la même image. Symboliquement :

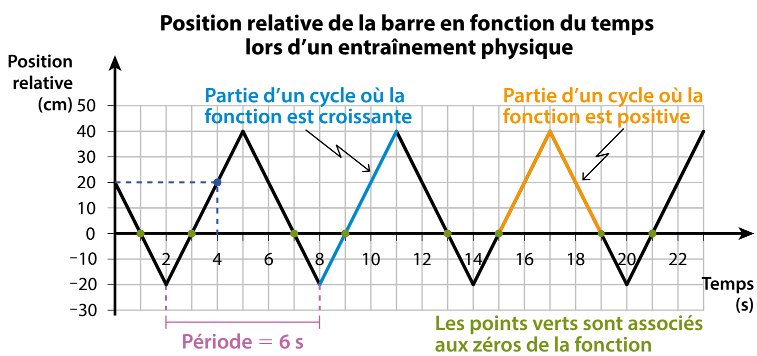
Si p est la période de la fonction, alors $f(x) = f(x \pm p) = f(x \pm 2p) = f(x \pm 3p) = \ldots$

Il en résulte que les propriétés concernant les intervalles de croissance ou de décroissance, les zéros et le signe de la fonction dépendent de la période.

Exemple :

La représentation graphique suivante est celle de la position en centimètres de la barre d'un appareil d'exercice par rapport au sommet de la tête de la personne qui l'utilise, en fonction du temps en secondes.

Des éléments liés aux propriétés de cette fonction ont été mis en évidence.



a) Dans ce contexte, on peut se demander à quelle position relative en centimètres la barre sera située à la 100e seconde.

Pour déterminer l'image d'un nombre, par exemple $f(100)$, on peut procéder de la façon suivante.

Soustraire de 100 autant de multiples de 6 qu'il faut pour réduire ce nombre à un élément du domaine dont on connaît l'image.	On peut soustraire 16 fois 6. $100 - 16 \times 6 = 4$
Déterminer l'image du résultat obtenu. L'image de 100 est la même.	Selon le graphique, $f(4) = 20$ cm. On a donc $f(100) = 20$ cm.

b) Voici comment on pourrait décrire certaines propriétés de cette fonction pour tout son domaine.

- Intervalles de croissance (s) : [2, 5], [8, 11], [14, 17], [20, 23], [26, 29], …
- Zéros de la fonction = {1, 3, 7, 9, 13, 15, 19, 21, 25, 27, …} s
- Partie du domaine où la fonction est positive (s) : [0, 1] ∪ [3, 7] ∪ [9, 13] ∪ [15, 19] ∪ [21, 25] ∪ …

EXERCEZ-VOUS

8 Répondez aux questions suivantes en vous référant au graphique de la rubrique *À retenir*.

a) Déterminez la position relative de la barre (en centimètres) aux temps suivants :

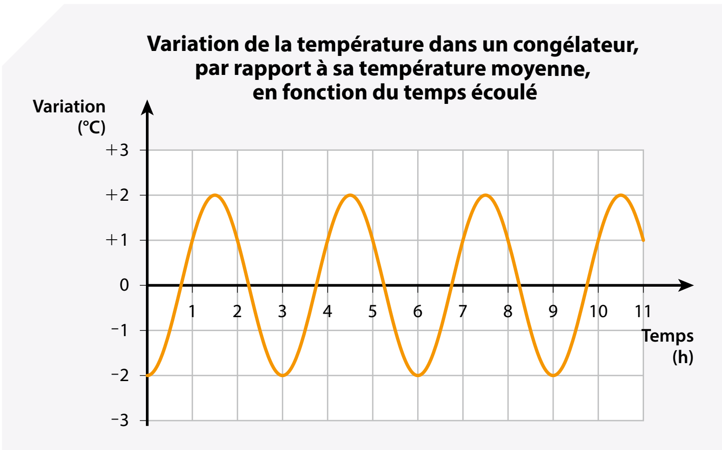
1) 50 s : ______ 2) 75 s : ______ 3) 275 s : ______

b) Quels sont les zéros de la fonction entre 30 s et 50 s ?

c) Quels sont les cinq premiers intervalles de décroissance de la fonction ?

d) Dans quelle partie du domaine la fonction est-elle négative ? Utilisez la même notation que dans l'exemple.

9 Dans un congélateur, la température n'est pas constante. Elle varie de plus ou moins 2 degrés autour d'une température moyenne qui est fixée par l'usager. La représentation graphique suivante est une modélisation de la situation où l'on suppose que la température prend autant de temps à baisser qu'à monter. Le temps est compté à partir du moment où la température est la plus basse.



a) Après une période de 20 h, la température sera-t-elle au-dessus ou en dessous de la moyenne ? Justifiez votre réponse.

b) Entre 20 h et 24 h, combien de fois la température sera-t-elle égale à la moyenne ?

c) Entre 20 h et 24 h, durant quel intervalle de temps, la température du congélateur sera-t-elle croissante ?

10 Le déroulement des jours de la semaine suit un modèle périodique.

a) Si le 1er janvier est un lundi, quel jour de la semaine sera le 9 juillet ? Expliquez votre démarche.

b) Qu'arrive-t-il durant une année bissextile ?

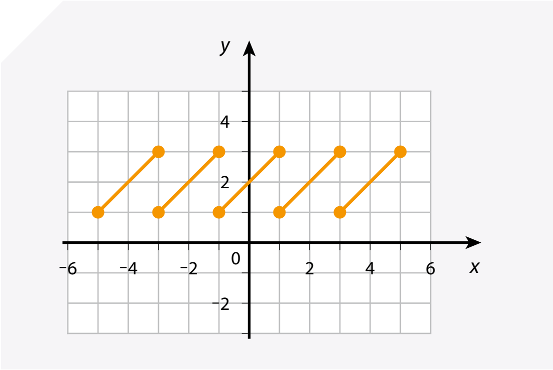
CORRIGÉ PAGE 237

TABLE DES MATIÈRES | CORRIGÉ

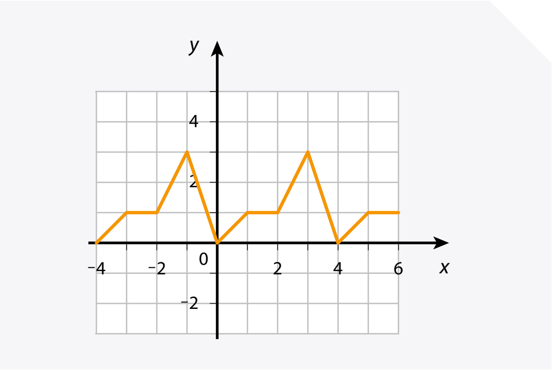
CONSOLIDATION

1. Parmi les graphiques suivants, encerclez ceux qui représentent une fonction périodique. Si la fonction est périodique, donnez la valeur de la période.

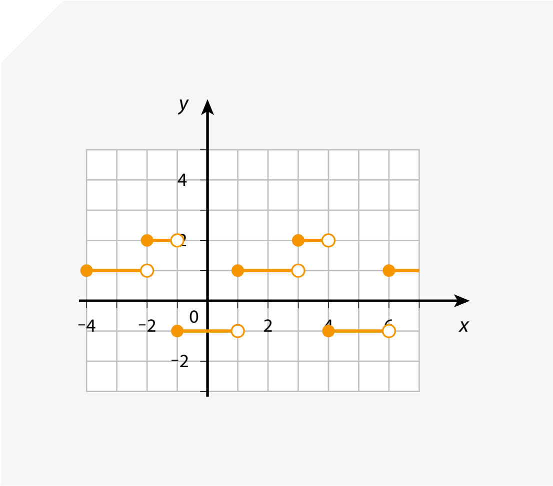
A)



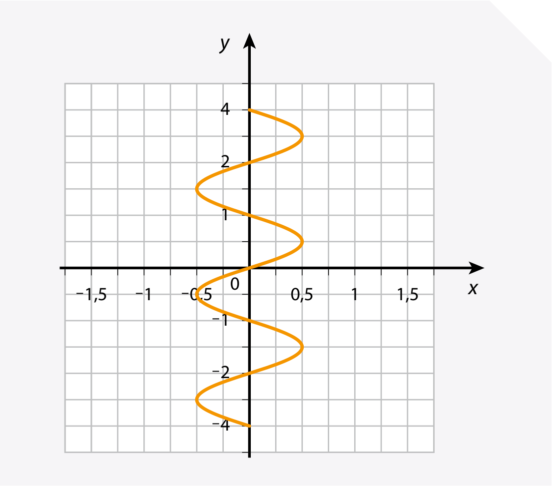
B)



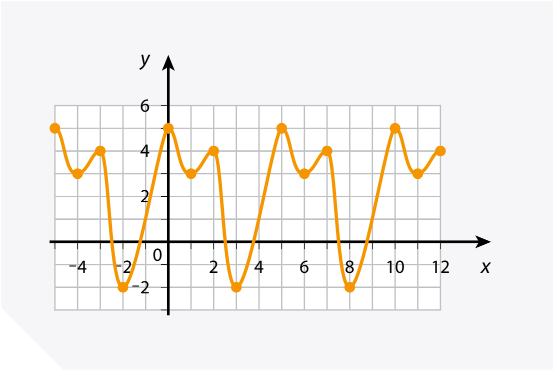
C)



D)

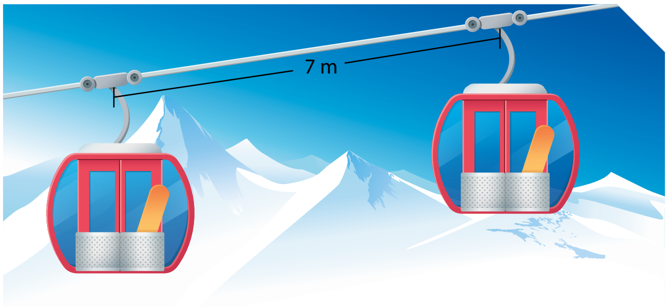


E)



2 Dans un centre de ski, une remontée mécanique compte 150 cabines du côté de la remontée et le même nombre du côté de la descente. La distance entre les cabines est de 7 m. La vitesse de la remontée est de 210 m/min. Au début des observations, la cabine numéro 2 est déjà tout en haut.

Quelle sera la position de cette cabine après 18 min 20 s, sachant que le système de remontée continue au même rythme ?

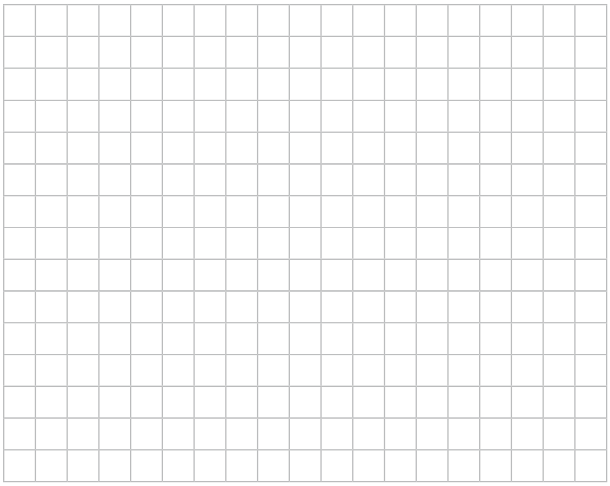


3 Au port de Matane, on observe le phénomène de la marée, qui suit un modèle périodique sur un court intervalle de temps.

Voici quelques données relevées.

- À marée haute, le niveau de l'eau est de 2,8 m.
- À marée basse, le niveau de l'eau est de 1 m.
- Le temps qui s'écoule entre deux marées hautes est de 12 h.
- La dernière marée haute a été enregistrée à 23 h 30.

Représentez graphiquement ce phénomène durant deux jours, en mettant en relation le niveau de l'eau en mètres et le temps en heures (si $t = 0$ correspond à minuit).



4 Le cadran d'une montre digitale est orné d'un disque séparé en 5 secteurs isométriques lumineux. Pour une question d'esthétisme, différentes combinaisons de secteurs s'allument toutes les 10 s. Le motif lumineux suit un modèle périodique, dont la période est de 100 s. La montre est initialisée de telle sorte qu'à minuit, aucun secteur n'est allumé.

Le tableau ci-contre consigne le nombre de secteurs illuminés selon le temps en secondes, à partir de minuit.

Combien de secteurs seront illuminés le lendemain, à 12 h 26 min 45 s ?

Secteurs illuminés sur une période selon le temps

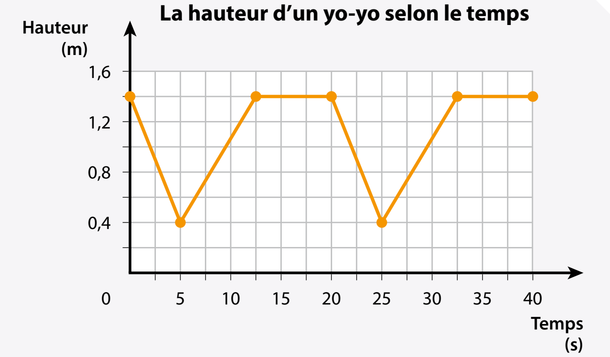
Temps (s)	Nombre de secteurs illuminés
[0 , 10[	0
[10 , 20[	4
[20 , 30[	3
[30 , 40[	2
[40 , 50[	4
[50 , 60[	5
[60 , 70[	1
[70 , 80[	5
[80 , 90[	4
[90 , 100[	4

5 Un jeu de société pour enfants est constitué de 12 carottes enfoncées dans un socle et d'un lapin en caoutchouc éjectable. Une version simplifiée du jeu consiste à retirer à tour de rôle une carotte du socle. L'une des carottes libère le lapin qui sera propulsé dans les airs. Pour gagner, la personne qui a retiré la carotte doit attraper le lapin quand il saute. Le grand frère prend en note le nombre de carottes nécessaires pour faire sauter le lapin à chaque partie, 4, 7, 9, 2, 12, 3, 4, 7, 9, 2, 12, 3, 4, etc.

Le système d'engrenage, qui libère le lapin après avoir enlevé un certain nombre de carottes, suit un cycle.

Si deux frères s'amusent à ce jeu et que c'est le plus jeune qui commence la partie, qui retirera la carotte qui libérera le lapin de la 20e partie ? Expliquez votre raisonnement.

6 Un enfant joue avec son yo-yo et fait le même geste à répétition. La représentation graphique ci-contre modélise la relation entre la hauteur en centimètres du yo-yo, selon le temps en secondes.



a) Quelle est la période ? Que signifie-t-elle ?

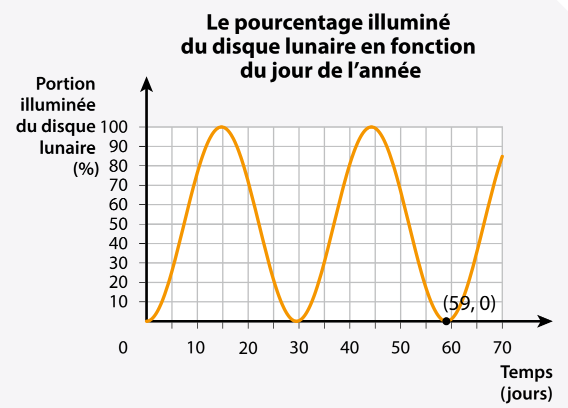
b) Que représente les moments où la hauteur du yo-yo demeure inchangée ?

c) Que représente le maximum dans ce contexte ?

d) Quelle est la longueur de la corde du yo-yo ?

e) Quelles sont les vitesses de descente et de montée du yo-yo ?

7 La modélisation du pourcentage illuminé du disque lunaire visible de la Terre suit un modèle périodique. La représentation graphique de ce modèle illustre le pourcentage illuminé du disque lunaire en fonction du temps en jours, où $t = 0$ est le mercredi 1er janvier.



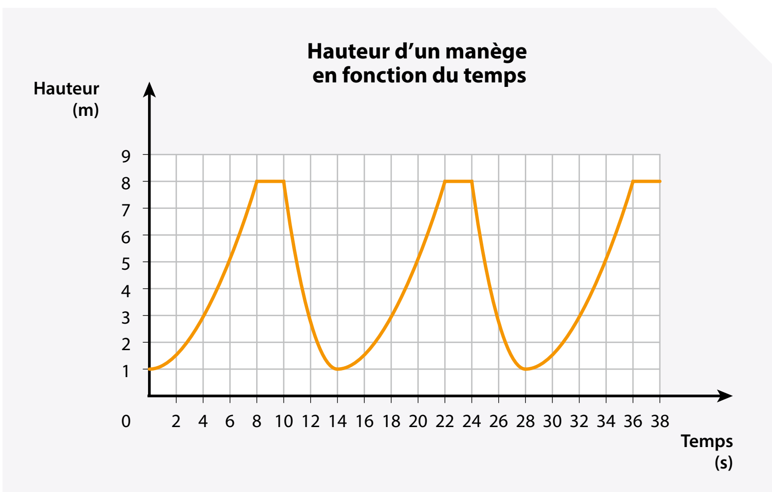
Selon le calendrier judéo-chrétien, la fête de Pâques a lieu le premier dimanche qui suit la première pleine lune du printemps, qui arrive le 21 mars.

Déterminez la date de la fête de Pâques cette année-là et estimez le pourcentage illuminé de la lune ce jour-là, sachant qu'il ne s'agit pas d'une année bissextile.

8 Au parc, Adélaïde demande à sa mère de l'aider à grimper sur une balançoire située à 0,8 m du sol. Après son élan de départ, elle maintient un rythme de 10 allers-retours en 40 s.

À quelle hauteur du sol Adélaïde se trouve-t-elle après 2 min 33 s, si le départ correspond à sa hauteur maximale vers l'arrière, soit 2 m du sol ? Où est-elle exactement ?

9 Un manège semblable au bateau pirate donne des sueurs froides à ses occupants. La représentation graphique ci-dessous illustre la situation.



Le tour de manège a une durée totale de 4 min 20 s. Après ce temps, le manège ne suit plus un modèle périodique.

Déterminez combien de tours il aura fait et quelle sera sa hauteur.
Expliquez vos réponses.

CORRIGÉ PAGE 239

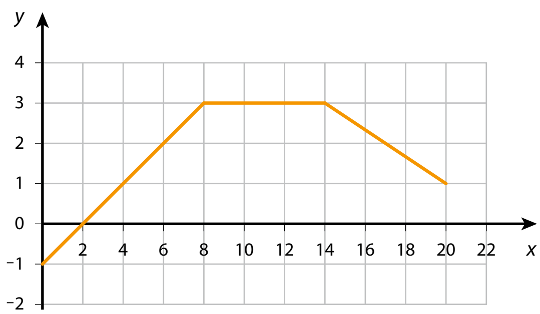
SAVOIRS EN RÉSUMÉ

Voici un résumé de tous les savoirs **À RETENIR**. Écrivez les informations manquantes.

La fonction définie par parties

Une fonction définie par parties, c'est une fonction dont la règle diffère selon l'intervalle dans lequel se situe la variable ________.

Exemple :

Représentation graphique	Règle de la fonction
	$f(x) = \begin{cases} 0{,}5x - 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ 3 & \text{si } 8 \leq x \leq 14 \\ -\frac{x}{3} + \frac{23}{3} & \text{si } 14 \leq x \leq 20 \end{cases}$

La fonction en escalier

C'est une fonction définie par parties qui est constante sur chacun des intervalles qui servent à la définir et qui varie brusquement par sauts lorsque la variable ________ passe d'un intervalle à l'autre.

Exemple :

Le nombre d'autobus nécessaires pour une sortie en fonction du nombre de passagers

Représentation graphique

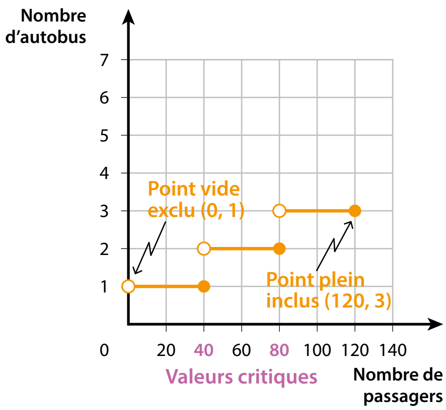


Table de valeurs

Nombre de passagers	Nombre d'autobus
	1
	2
	3

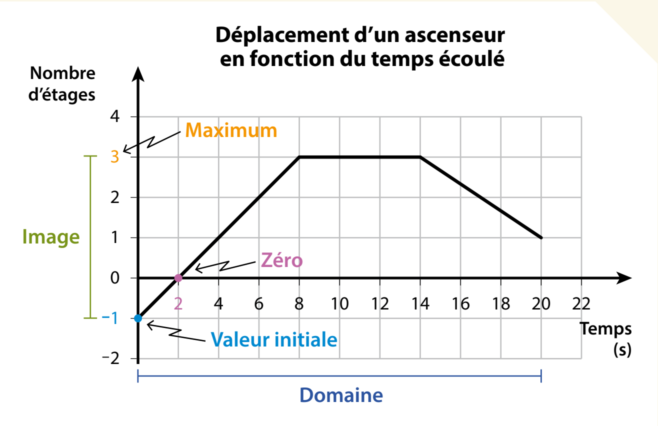
L'image de 40 est ________. L'image de 80 est ________.

RÉSUMÉ DES SAVOIRS PAGE 201

TABLE DES MATIÈRES
CORRIGÉ

Les propriétés d'une fonction

Pour définir les principales propriétés d'une fonction, on utilisera en exemple la fonction représentée dans le graphique ci-contre.



Propriété de la fonction	Définition	Exemple (relié à la représentation graphique ci-dessus)
Domaine	L'ensemble des valeurs que prend la variable ______.	______
Image ou ______	L'ensemble des valeurs que prend la variable ______.	______
Valeur initiale	La valeur de ______. Graphiquement, $f(0)$ correspond à l'ordonnée du point qui se situe à l'intersection du graphique de la fonction et de l'axe des ordonnées. C'est pourquoi on la nomme aussi ______.	______
Zéros	La valeur ou les valeurs de x pour lesquelles ______. Graphiquement, cela correspond à l'abscisse du ou des points qui se situent à l'intersection du graphique de la fonction et de l'axe des abscisses. C'est pourquoi on les nomme aussi ______.	______
Signe	Une fonction est positive sur une partie de son domaine, si $f(x) \geq 0$ pour toutes les valeurs de x dans cette partie. Une fonction est négative sur une partie de son domaine, si ______ pour toutes les valeurs de x dans cette partie.	La fonction est positive sur ______. Elle est négative sur ______.
Minimum ou maximum	Le minimum est la plus petite valeur que prend la variable ______. Le maximum est sa plus grande valeur.	Minimum : ______. Maximum : ______.
Variation	Une fonction est constante sur un intervalle du domaine, si la valeur de $f(x)$ ne varie pas pour toutes les valeurs de x dans cet intervalle. La fonction est croissante sur l'intervalle, si la valeur de $f(x)$ augmente ou ne varie pas lorsque la valeur de x augmente dans cet intervalle. Elle est décroissante sur l'intervalle, si la valeur de $f(x)$ ______ ou ______ lorsque la valeur de x augmente dans cet intervalle.	La fonction est constante dans l'intervalle ______. Elle est croissante dans l'intervalle ______. Elle est décroissante dans l'intervalle ______.

Interpréter les propriétés d'une fonction, c'est expliquer ce que ces propriétés signifient en tenant compte du contexte.

Exemple :

Voici comment on peut interpréter quelques-unes des propriétés issues de la représentation graphique.

Domaine : On s'intéresse à la hauteur de l'ascenseur durant les 20 premières secondes de son déplacement.

Image : L'ascenseur se promène entre le premier niveau du sous-sol (étage $^{-}1$) et le troisième étage.

Valeur initiale : Au départ, l'ascenseur se situe ____________.

Zéro : L'ascenseur est passé au niveau du rez-de-chaussée ____________ après son départ.

Fonction négative : L'ascenseur était au rez-de-chaussée ou plus bas, durant les ____________.

Maximum : L'ascenseur est monté jusqu'au ____________.

Fonction croissante : L'ascenseur est resté au même étage ou est monté dans l'intervalle de temps qui va de ________ à ________ après son départ.

Fonction constante : L'ascenseur est resté au même étage dans l'intervalle de temps qui va de ________ à ________ après son départ.

Fonction décroissante : L'ascenseur est resté au même étage ou est descendu dans l'intervalle de temps qui va de ________ à ________ après son départ.

La fonction périodique

C'est une fonction dont le graphique est constitué d'un motif qui se répète sur la totalité de son domaine.

Le motif qui se répète est un ____________ de la fonction.

La ____________ de la fonction est la longueur de l'intervalle qui contient un cycle complet.

Pour estimer avec précision la période de la fonction à partir d'une représentation graphique, on doit :

- compter le nombre de cycles qui s'inscrivent dans un intervalle donné,
- puis diviser la longueur de cet intervalle par le nombre obtenu.

Exemple :

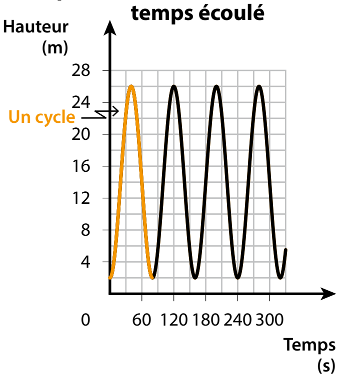
Période de cette fonction : ____________

Explication : Dans l'intervalle [0, 240] s'il y a 3 cycles complets.

Hauteur minimale : ________

Hauteur maximale : ________

Hauteur d'un siège dans la grande roue d'un parc d'attractions en fonction du temps écoulé



CHAPITRE 1
SAVOIRS EN RÉSUMÉ

L'analyse d'une fonction périodique

Lorsqu'une fonction est périodique, les éléments du domaine dont la différence est un multiple de la période ont la même ______.

Il en résulte que les propriétés concernant les intervalles de croissance ou de décroissance, les zéros et le signe de la fonction dépendent de la période.

Exemple :

Dans la situation décrite par la représentation graphique précédente, on détermine comme suit la hauteur du siège après 25 min :

Soit $f(x)$ la hauteur du siège en mètres après x s.

Un temps de 25 min équivaut à 1500 s. On cherche donc la valeur de $f(1500)$.

On détermine comme suit les intervalles de temps durant lesquels la hauteur du siège augmente :

Comme la période est de ______ et que la courbe symétrique du cycle commence à son point le plus bas (minimum), on peut déduire que, dans le premier cycle, la fonction est croissante dans l'intervalle ______.

Pour les autres cycles, il faut ajouter des multiples de la période à chaque borne de cet intervalle.

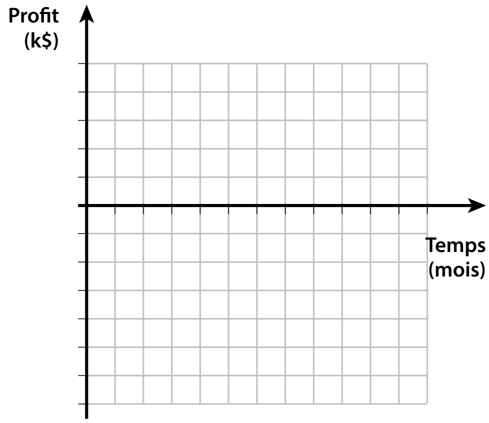
Réponse : La hauteur du siège augmente dans les intervalles de temps suivants :

INTÉGRATION

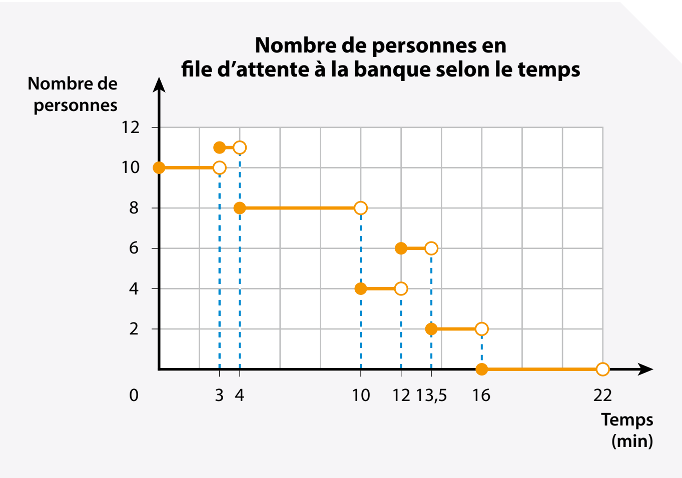
1 Une usine de bacs de recyclage en restructuration décide d'engager une nouvelle directrice des ventes qui aura pour mandat d'augmenter les profits de l'entreprise au cours de la prochaine année.

À l'arrivée de la nouvelle directrice, le profit de l'entreprise représentait une perte de 6000 $. Les deux premiers mois à la direction lui ont permis de ramener le profit à une valeur nulle. Pour les deux mois suivants, l'entreprise s'est mise à faire des profits de 1000 $ par mois. Puis, pendant deux autres mois, les profits ont suivi la règle $f(x) = {}^{-}0{,}5x + 4$, où x est exprimé en mois et $f(x)$ en milliers de dollars. Finalement, pendant les six derniers mois de l'année, les profits ont augmenté à un rythme équivalent au taux de diminution des profits des deux mois précédant cette période.

Représentez graphiquement cette situation en considérant que les changements entre les différentes périodes de temps se font de façon constante.



2 La représentation graphique ci-contre décrit le nombre de personnes dans une file d'attente à la banque en fonction du temps (min) après l'ouverture.



a) Quel est le nombre maximum de personnes dans la file d'attente ?

b) Dans quel intervalle de temps le nombre de personnes en file est-il le plus élevé ?

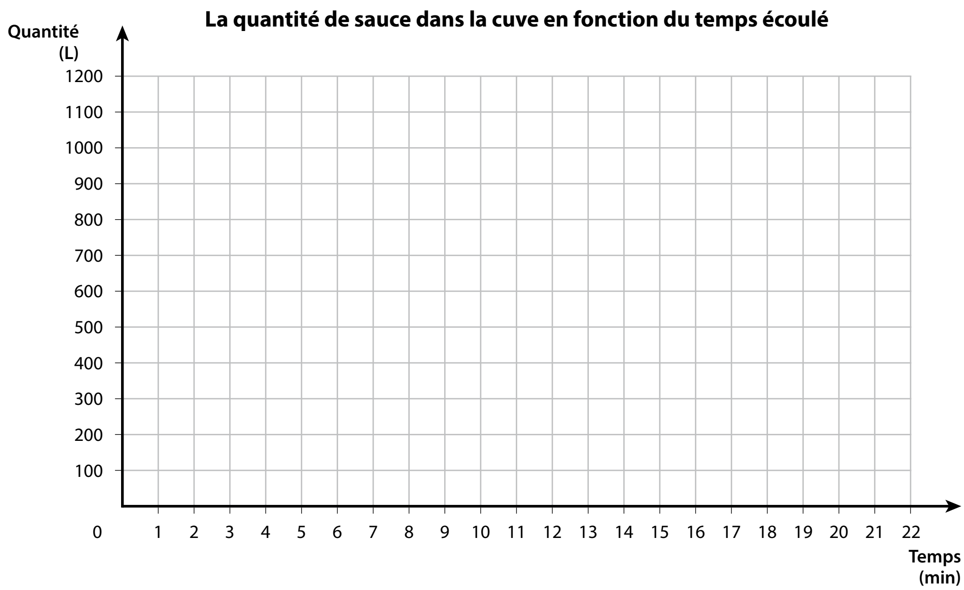
c) Combien de personnes y avait-il dans la file initialement ?

d) À quels moments le nombre de personnes augmente-t-il dans la file d'attente ?

e) Combien de temps est nécessaire pour qu'il ne reste personne en file ?

3 Une entreprise fabrique de la sauce à spaghetti. Elle a robotisé sa chaîne de production. Dans une cuve contenant 400 L de tomates broyées, un système mécanique prend 4 min à ajouter un mélange de viande et d'épices. La quantité de sauce dans la cuve (en litres) en fonction du temps écoulé (en minutes) peut se modéliser par la règle $f(x) = 50x + 400$. Ensuite, un bras automatique vient brasser le mélange pendant 7 min. La troisième étape d'une durée de 2 min, consiste à incorporer des ingrédients liquides au rythme de 150 L/min. Finalement, une valve s'ouvre et évacue la sauce qui s'écoule à une vitesse de 150 L/min. Le processus de fabrication prend 19 min au total.

Décrivez la fonction définie par parties, puis déterminez à quel moment la cuve aura atteint la quantité maximale de sauce à spaghetti et quelle sera cette quantité.

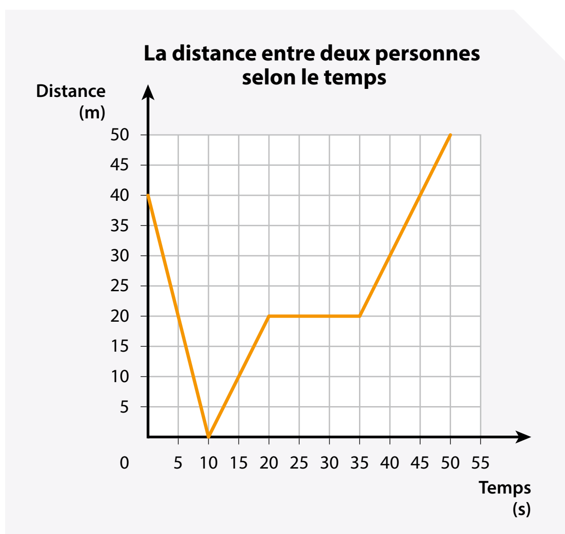


4 Dans un cybercafé, les utilisateurs peuvent avoir accès à Internet pour une somme de 5 $ par tranche de 10 min d'utilisation.

a) Quel modèle fonctionnel correspond à cette situation ? ____________________

b) Représentez graphiquement la situation.

5 Le graphique ci-dessous modélise la distance en mètres entre deux personnes selon le temps en secondes. Répondez aux questions suivantes.



a) Quelle est la distance entre les deux personnes au départ ?

____

b) À quel moment se rejoignent-elles ?

____

c) À quel(s) moment(s) la distance entre les deux personnes est-elle constante ?

____

d) Sur quel intervalle de temps les personnes se rapprochent-elles ?

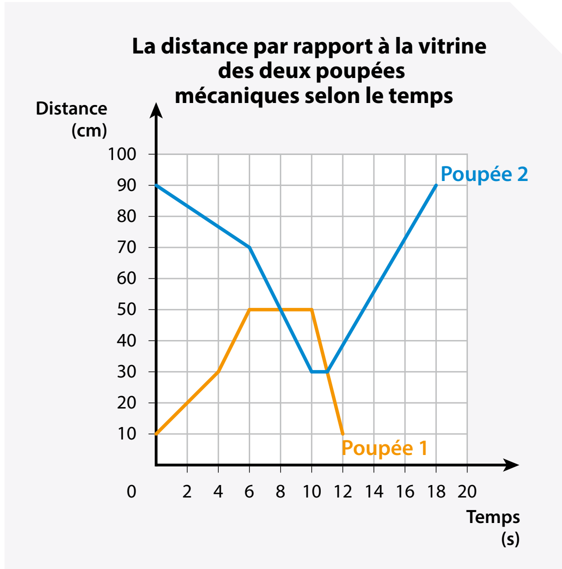
____

e) Quelle distance les sépare après 45 s ?

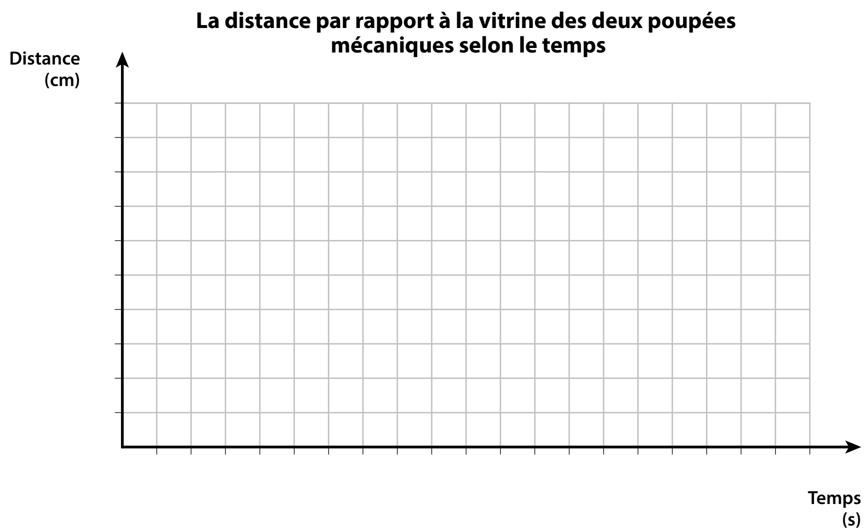
____

CORRIGÉ PAGE 240

6 Dans la vitrine d'un grand magasin, deux poupées mécaniques exécutent un circuit simulant une valse. La représentation graphique suivante modélise le premier cycle de chacune des poupées où l'on observe la distance en centimètres entre la vitrine et la poupée selon le temps en secondes.



Jusqu'à ce que les deux poupées reviennent en même temps à leur position initiale, combien de fois seront-elles à la même distance de la vitrine ? À quels moments cela arrivera-t-il ?



7 Deux compagnies distributrices de forfaits cellulaires offrent des options différentes pour le même appareil. La compagnie CelPlus demande 0,005 $ pour chaque seconde d'utilisation du cellulaire. Pour sa part, la compagnie Novatel demande 24 $ par mois plus 0,15 $ la minute complète ou partielle d'utilisation.

Déterminez l'option la plus avantageuse.

CORRIGÉ PAGE 241

8 Dans le film *Rencontre du troisième type*, les humains tentent d'entrer en contact avec une entité extraterrestre à l'aide d'une mélodie de 5 notes jouées en boucle, la 4, si 4, sol 4, sol 3 et ré 4. Le tableau ci-dessous donne la fréquence de certaines notes de musique.

Note	Sol 3	La 3	Si 3	Do 4	Ré 4	Mi 4	Fa 4	Sol 4	La 4	Si 4
Fréquence (Hz)	196	220	233	262	294	330	350	392	440	494

Sur la portée, chaque note est représentée par une note blanche qui équivaut à une durée de 2 s. À la fin de la séquence de 5 notes, il y a deux soupirs qui sont aussi équivalents à 2 s. Ensuite, cette séquence musicale est jouée en boucle. Quelle sera la fréquence de la note entendue après 4 min et 43 s, si la mélodie est jouée en boucle ? Expliquez votre raisonnement.

9 Lors de la journée d'activité sportive de l'école, Noah, Liam et Axel s'affrontent dans une course à vélo en faisant deux tours de piste de 400 m. Voici la description de la course de ces trois participants.

Axel commence sa course à une vitesse de 200 m par 30 s. Après 1 min, il atteint une vitesse de 200 m par 20 s. Malheureusement, une crampe à la jambe l'arrête après 80 s de course.

Liam décide de suivre la même cadence du début à la fin de sa course. Il fait 80 m toutes les 15 s.

Noah use de stratégie, il commence sa course lentement en parcourant son premier tour en 100 s. Pour son deuxième tour, il accélère à 10 m/s.

Déterminez les moments où les différents participants se dépassent, puis donnez le gagnant de la course. Expliquez votre démarche.

10 La distance entre Montréal et Québec est d'environ 250 km. Le réservoir d'essence du véhicule de Léanne a une capacité de 50 L. Au moment de son départ de Montréal, le réservoir est plein. Elle roule à une vitesse moyenne de 100 km/h, ce qui lui assure une consommation d'essence moyenne de 8 L/100 km. Après 85 km de route, elle s'arrête à Sainte-Hélène-de-Bagot pendant 20 min. Elle reprend la route et arrive à Québec sans faire d'autre arrêt. Une fois en ville, Léanne est ralentie. Pendant ces 20 autres minutes de déplacement, sa voiture consomme 6 L d'essence. Après une réunion de 1,5 h, elle retourne à Montréal à la même vitesse moyenne de 100 km/h, sans faire de halte.

Modélisez graphiquement la variation de la quantité de litres restante dans le réservoir d'essence en fonction du temps en minutes, puis déterminez quelle quantité d'essence en litres il restera dans le réservoir de son automobile.

SAÉ

Une séance d'entraînement

Joanne s'entraîne à courir 10 km. Sa séance d'entraînement comporte toujours différents segments de course à des vitesses prédéterminées, qui sont décrites dans le tableau ci-dessous.

Les vitesses d'entraînement de Joanne

Abréviation	Description	Vitesse
VR	Vitesse de réchauffement ou de récupération	150 m/min
VE	Vitesse d'endurance de base	170 m/min
V10	Vitesse visée durant les 10 km	200 m/min

Voici son plan d'entraînement pour aujourd'hui.

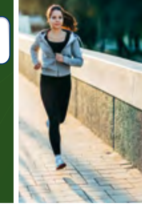
- Courir 5 min à VR, puis 5 min à VE.
- Répéter 3 fois le cycle constitué de 4 min à V10 et de 3 min à VR.
- Terminer avec 5 min à VE suivies de 4 min à VR.

Pour son entraînement, elle part de chez elle et court dans une rue tranquille durant la moitié du trajet. Puis elle prévoit revenir exactement sur ses pas pour terminer devant chez elle, à son point de départ.

Joanne aimerait savoir à quel moment elle devra faire demi-tour pour revenir sur ses pas.

TÂCHE

Déterminez après combien de temps de course en minutes et en secondes Joanne devra faire demi-tour pour revenir sur ses pas afin de terminer son entraînement à son point de départ. Justifiez vos réponses à l'aide de représentations appropriées.



Résolution

Réponse :

	Évaluation par critère				
Cr. 1.1	A	B	C	D	E
Cr. 1.2	A	B	C	D	E
Cr. 2.1	A	B	C	D	E
Cr. 2.2	A	B	C	D	E
Cr. 2.3	A	B	C	D	E

CORRIGÉ PAGE 243

RÉSOLUTION

La collection **RÉSOLUTION** couvre l'ensemble des cours du programme de formation de base commune et diversifiée, dont les séquences *Culture, société et technique* (CST) et *Sciences naturelles* (SN) de 4e secondaire.

sofad

RÉSOLUTION propose une démarche d'apprentissage basée sur l'acquisition de tous les savoirs mathématiques prescrits en contexte de résolution de problèmes. La séquence d'apprentissages qui soutient cette approche est la suivante :

PRÉSENTATION D'UNE SITUATION-PROBLÈME

EXPLORATION DU PROBLÈME

APPROPRIATION DES SAVOIRS

RÉSOLUTION DU PROBLÈME

CONSOLIDATION DES APPRENTISSAGES

Le questionnement, à la fois inductif et déductif, donne un sens aux savoirs et aux stratégies à acquérir. Les guides d'apprentissage offrent une multitude d'exercices simples et de tâches plus complexes en réponse aux besoins exprimés par les apprenants et les enseignants. Des ressources supplémentaires sont aussi offertes sur le Portail Web du cours.

Composantes de la collection RÉSOLUTION :

- Guide d'apprentissage : version imprimée et PDF ;
- Guide synthèse d'enseignement (PDF) ;
- Capsules vidéo des situations-problèmes ;
- Activités TIC : GeoGebra, calculatrice graphique ;
- Activités notées ;
- Corrigés.

ISBN 978-2-89493-652-8

Imprimé au Québec 8504-01